Fatih GÜRSES

# DİFERANSİYEL DENKLEMLER
# VE
# LİNEER CEBRİN ELEMANLARI

Fatih GÜRSES

# DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE LİNEER CEBRİN ELEMANLARI

Prof. Dr. HÜSEYİN HALİLOV

Kocaeli Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Literatür Yayınları: 96

**DİFERANSİYEL DENKLEMLER**
**VE LİNEER CEBRİN ELEMANLARI**
Hüseyin Halilov

Birinci Basım: Mayıs 2003, İstanbul

**Genel Yayın Yönetmeni:** Kenan Kocatürk
**Editör:** Saadet Özkal
**Uygulama:** Aslı Akgün
**Kapak:** Yetkin Başarır
**Matbaa:** Çevik Matbaacılık
**Kapak Baskı:** Matris Matbaacılık
**Cilt:** Savaş Ciltevi

**ISBN:** 975-8431-98-6

© Copyright 2003, **Literatür:** Yayıncılık

Bu kitabın yayın hakları Literatür Yayıncılık Dağıtım Pazarlama San. ve Tic. Ltd. Şti.'ne aittir. Kitabın tamamı veya bir bölümü hiçbir biçimde çoğaltılamaz, dağıtılamaz, yeniden elde edilmek üzere saklanamaz.

**LİTERATÜR:** YAYINCILIK, DAĞITIM,
PAZARLAMA, SANAYİ VE TİCARET LTD. ŞTİ.
İSTİKLAL CADDESİ, NO: 133 KAT 1-2 TR-80071
BEYOĞLU, İSTANBUL, TÜRKİYE

**T** 0(212) 292 4120
**F** 0(212) 245 5987
**E** literatur@literaturkitabevi.com.tr
www.literaturkitabevi.com.tr

# YAZAR HAKKINDA

**Prof. Dr. Hüseyin Halilov**, 1960 yılında Azerbaycan Pedagoji Üniversitesi'nin Matematik ve Fizik Bölümü'nden mezun olmuş, 1965 yılında doktorasını tamamladıktan sonra, 1995 yılına dek Sovyetler Birliği'nin ilk yirmi üniversitesi arasında yer alan Azerbaycan Neft Akademisi (Azerbaycan eski Sanayi Üniversitesi) Matematik Bölümü'nde Yrd. Doçent, Doçent ve Profesör olarak çalışmıştır. 1969-1994 yıllarında Akademi Hazırlık Fakültesi'nin dekanı olarak görev yapmıştır. 1995 yılının Ekim ayından beri Kocaeli Üniversitesi'nde sözleşmeli öğretim üyesi olarak çalışmaktadır.

Prof. Dr. Halilov, hiperbolik ve parabolik denklemler için karışık problemlerin incelenmesiyle ilgili çeşitli ulusal ve uluslararası matematik kongrelere bildirilerle katılmıştır. "Dokl. Akad. Nauk USSR" dergisi dahil ulusal ve uluslararası birçok dergide çok sayıda yazısı yayınlanmıştır. Üniversitelerin yüksek matematik ve mühendislik fakültelerinde okutulan ve aralarında Yüksek Matematik 1 ve Yüksek Matematik 2'de bulunan 25 kitabın yazarıdır.

Sevgili hocam Prof. Dr. Hüseyin Çendirli'ye ve
rahmetli çok değerli hocalarım
Nazim Garayev (lise hocam),
Doç. Dr. Bahram Yusufzade (yüksek lisans hocam),
Prof. Dr. Goşgar Ahmedov (doktora hocam)
anısına...

# İÇİNDEKİLER


| | | |
|---|---|---|
| | **ÖNSÖZ** | **ix** |
| **BÖLÜM 1** | **LİNEER CEBRİN ELEMANLARI** | **1** |
| 1.1 | Matrisler ve Onlar Üzerinde İşlemler | 1 |
| 1.2 | İki Basamaklı Determinant ve Özellikleri | 9 |
| 1.3 | Yüksek Basamaklı Determinantlar | 13 |
| 1.4 | Ters Matris. Matrisin Rankı | 23 |
| 1.5 | Doğrusal Denklemler Sistemi | 32 |
| | Bölüm 1 İçin Çeşitli Alıştırmalar | 55 |
| **BÖLÜM 2** | **DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TEMEL KAVRAMLARI BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER** | **59** |
| 2.1 | Diferansiyel Denklem Tanımı. Genel Kavramlar | 59 |
| 2.2 | Diferansiyel Denklem Kavramını Gerektiren Problemler | 70 |
| 2.3 | Başlangıç Değer Probleminin Çözümü ile İlgili Bazı Teoremler | 75 |
| 2.4 | Değişkenleri Ayrılabilir Diferansiyel Denklemler | 79 |
| 2.5 | Türdeş Diferansiyel Denklemler ve Bunlara Dönüştürülebilen Diferansiyel Denklemler | 87 |
| 2.6 | Doğrusal Diferansiyel Denklemler. Bernoulli ve Riccati Denklemleri | 97 |
| 2.7 | Darboux Denklemi | 115 |
| 2.8 | Tam Diferansiyel Denklem. İntegral Çarpanı | 119 |
| 2.9 | Tekil Nokta ve Tekil Çözüm | 131 |
| 2.10 | Türeve Göre Çözülmemiş Denklemler. Lagrange ve Clairaut Denklemleri | 133 |
| | Bölüm 2 İçin Çeşitli Alıştırmalar | 143 |
| **BÖLÜM 3** | **YÜKSEK MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER DİFERANSİYEL DENKLEMLER SİSTEMİ** | **145** |
| 3.1 | Yüksek Mertebeden Diferansiyel Denklemler | 145 |
| 3.2 | Yüksek Mertebeden Doğrusal Diferansiyel Denklemler | 156 |

| | | |
|---|---|---|
| 3.3 | Sabit Katsayılı Türdeş Diferansiyel Denklemler | 169 |
| 3.4 | Türdeş Olmayan Yüksek Mertebeden Diferansiyel Denklemler | 179 |
| 3.5 | Türdeş Olmayan Sabit Katsayılı Doğrusal Denklemler | 189 |
| 3.6 | Mekanik Salınım Denklemi ve İncelenmesi | 200 |
| 3.7 | Euler Denklemi | 212 |
| 3.8 | Diferansiyel Denklemler Sistemi | 220 |
| 3.9 | Sınır Değer Problemi | 236 |
| 3.10 | Özdeğer Problemi | 241 |
| 3.11 | Doğrusal Diferansiyel Denklemler Sisteminin Kararlılığı | 252 |
| | Bölüm 3 İçin Çeşitli Alıştırmalar | 264 |

**BÖLÜM 4 DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK YÖNTEMLERLE ÇÖZÜMÜ 267**

| | | |
|---|---|---|
| 4.1 | Genel Düşünceler | 267 |
| 4.2 | Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Yöntemlerle Çözümü | 267 |
| 4.3 | Seri Yöntemiyle Diferansiyel Denklemlerin Çözümü | 282 |
| | Bölüm 4 İçin Çeşitli Alıştırmalar | 307 |

**BÖLÜM 5 LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ VE UYGULAMALARI 309**

| | | |
|---|---|---|
| 5.1 | Laplace Dönüşümü Tanımı ve Özellikleri | 309 |
| 5.2 | Görüntülerin Diferansiyellenmesi ve İntegrallenmesi | 318 |
| 5.3 | Görüntüler Çizelgesi ve Uygulamaları | 324 |
| 5.4 | Başlangıç Fonksiyonun Diferansiyellenmesi ve İntegrallenmesi. İntegral Denklemlerin Çözümü | 332 |
| 5.5 | Kimi Özgün Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri | 340 |
| 5.6 | Sabit Katsayılı Doğrusal Diferansiyel Denklemlerin Çözümü | 353 |
| 5.7 | Duhamel Formülü ve Uygulanması | 370 |
| 5.8 | Dirac Fonksiyonları ve Uygulamaları | 375 |
| 5.9 | Diferansiyel Denklemler Sisteminin Çözümü | 381 |
| | Bölüm 5 İçin Çeşitli Alıştırmalar | 392 |

**ALIŞTIRMALARIN YANITLARI 397**

**DİZİN 445**

# ÖNSÖZ

Üniversitelerin Mühendislik ve ona benzer fakülteleri, öylece de Fen Edebiyat Fakültelerinin Matematik, Fizik ve Kimya bölümlerinin bütün öğrencileri, "Diferansiyel Denklemler" adı altında ders almaktadırlar. Bu ihtiyaçtan dolayı, uzun seneler severek emek verdiğim Azerbaycan Devlet Neft Akademisi ve Kocaeli Üniversitesindeki deneyimlerimle, yurt içinde ve yurt dışındaki çeşitli üniversitelerin Mühendislik Fakültelerinin Diferansiyel Denklemler dersinin çağdaş programını kapsayan bir kitap yazmayı düşündüm. Mühendislik Fakültelerinin bazı bölümlerinde Lineer Cebir dersinin okutulmadığını göz önünde bulundurup, kitaba Diferansiyel Denklemlerin öğrenilmesinde gerekli olduğu kadar Lineer Cebir bilgileri ekleyip adını Diferansiyel Denklemler ve Lineer Cebrin Elemanları koydum.

Kitapta Laplase Dönüşümü, mühendislik bilimlerinde ve uygulamalarında sık sık kullanıldığından, Diferansiyel Denklemlerin çözümünde gerekenden daha kapsamlı olarak açıklanmaktadır.

Konuları daha iyi anlamak için Kitapta, bir kısmı uygulama ağırlıklı olmak üzere, 170'den fazla çözülmüş, öylece de yanıtları verilmiş 1200'den fazla da alıştırma bulunmaktadır. Çözümü zor olan alıştırmalar (*'lı) için yönerge de verilmektedir. Mühendislik Fakültelerinin programının içermediği bazı konular * ile işaretlenmiştir.

Kitabın okunuşunu kolaylaştırmak için, sık sık parantez içi açıklamalar kullanılmış, öylece de, ben ve meslek arkadaşlarım, sayın Prof. Dr. Alemdar Hasanoğlu, Prof. Dr. Mehmet Can ile birlikte yazdığımız ve Literatür Yayıncılık tarafından basılan Yüksek Matematik 1 ve 2 (YM 1, YM 2) kitaplarına atıfta bulunulmuştur.

Kitabın, Mühendislik Fakülteleri öğrencilerinin dışında, yukarıda adı geçen fakültelerin ve bölümlerin öğrencileri, öylece de Diferansiyel Denklemler ile ilgilenen herkes için faydalı olacağını düşünüyorum.

Kitabın, içeriğine ait değerli önerilerinden dolayı Prof. Dr. Alemdar Hasanoğlu, Prof. Dr. Mehmet Can ve Prof. Dr. Yaşar Selimov'a, yazılmasında değerli fikirlerinden yararlandığım Doç. Dr. Sadi Bayramov, Doç. Dr. Zahir Muradoğlu, Doç. Dr. Elşen Veli, Yrd. Doç. Dr. Muharrem Soytürk ve Öğr. Gör. Burhan Pektaşa, bilgisayarda yazılmasında yardımlarından dolayı

Mehrali Halilli'ye teşekkür borcumu ifade etmek isterim. Ayrıca, kitabın editörlüğünü yapan Saadet Özkal'a itinalı incelemelerinden ve cümlelerin Türk Dili kurallarına uyumunu sağlamalarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Prof. Dr. Hüseyin Halilov

# BÖLÜM 1

# Lineer Cebrin Elemanları

## 1.1 MATRİSLER VE ONLAR ÜZERİNE İŞLEMLER

**Tanım** $m \times n$ sayıda $(m, n \in N)$, $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}$ gerçel sayılarından oluşan,

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix}$$

şeklindeki çizelgeye, $m \times n$ *boyutlu matris veya dikdörtgen matris* denir ve

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

ya da kısaca,

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{mn} \qquad (i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$$

şeklinde gösterilir. Burada, $m$ ve $n$ sırasıyla matrisin *satır* ve *sütun* sayısı, $a_{ij}$ *matrisin elemanları*, $i$ ve $j$ ise $a_{ij}$ elemanının bulunduğu *satır ve sütunun numarası* olarak tanımlanır. Özel olarak, $m = n$ olduğunda, matris, $n$ *basamaklı kare matris* veya sadece $n$ *basamaklı matris* diye adlandırılır ve

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad \mathbf{A}_n = [a_{ij}]_n \tag{2}$$

şeklinde yazılır.

$1 \times n$ boyutlu matrise *satır matris,* $n \times 1$ boyutlu matrise ise *sütun matris* denir ve sırasıyla

$$\mathbf{A}_{sr} = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}] \qquad \text{ve} \qquad \mathbf{A}_{sn} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

Bütün elemanları sıfırlar olan matrise, *sıfır matris* denir ve **O** harfiyle gösterilir. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [3 \ 7 \ 9 \ -3] \quad \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

matrisleri, sırasıyla $3 \times 4$ boyutlu, 3 basamaklı, 4 basamaklı sıfır, satır ve sütun matrisleridir.

Ele alınan matrislerin elemanları sayılar olduğundan, bunlara *sayısal matrisler* de denir. Elemanları fonksiyonlardan oluşan matrislere *fonksiyon matrisleri* denir. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ \sin x & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & e^x & 0 \end{bmatrix}$$

fonksiyon matrisleridir. Şimdilik biz sayısal matrisleri inceleyeceğiz.

$n$ basamaklı $\mathbf{A}_n$ matrisinin $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanlarının bulunduğu köşegene *esas köşegen,* $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ elemanlarının bulunduğu köşegene ise *yan köşegen* denir.

Kare matrisin bütün elemanları için $a_{ij} = a_{ji}$ eşitliği sağlandığında buna *simetrik matris,* $a_{ij} = -a_{ji}$ eşitliği sağlandığında ise *ters simetrik matris* denir. Ters simetrik matrisin esas köşegeninin bütün elemanlarının sıfır olacağı tanımdan görülmektedir. Örneğin, dört basamaklı

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & -5 & 1 \\ 4 & -5 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & -5 & 0 & 6 \\ -2 & -1 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri, sırasıyla simetrik ve ters simetrik matrislerdir.

Esas köşegeninin bir tarafında bulunan tüm elemanları sıfır olan kare matrise *üçgen matris* (ayrıca, esas köşegenden alt tarafta bulunan bütün eleman-

lar sıfır olduğunda *üst üçgen matris,* esas köşegenden üst tarafta bulunan bütün elemanlar sıfır olduğunda ise *alt üçgen matris*), esas köşegenin her iki tarafında bulunan bütün elemanları sıfır olan matrise ise *köşegen matris* denir. Bütün köşegen elemanları 1 olan köşegen matrise *birim matris* denir ve $\mathbf{E}_n$ ile gösterilir. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -6 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

matrisleri, 4 basamaklı üçgen (birincisi alt, ikincisi üst üçgen),

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri ise 4 basamaklı köşegen matrislerdir. Üstelik, sonuncu matris birim matristir ($\mathbf{E}_4$).

Aynı boyutlu $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{mn}$ ve $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{mn}$ matrislerinin bütün elemanları için $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1, m,\ j = 1, n)$ eşitliği sağlandığında, bunlara *eşit matrisler* denir ve $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ şeklinde yazılır.

Aynı boyutlu $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{mn}$ ve $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{mn}$ *matrislerinin toplamı,* elemanları $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(i = 1, m,\ j = 1, n)$ olarak belirlenen $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{mn}$ matrisiyle ifade edilir ve

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]_{mn}$$

olarak gösterilir. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 & -3 \\ -1 & 6 & -2 & 5 \\ -4 & 9 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

eşitliği doğrudur.

Üç ve daha fazla matrisin toplamı da benzer şekilde tamamlanır.

Matrislerin toplamı tanımından, açıktır ki, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ aynı boyutlu matrisler olduğunda,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

eşitliği doğrudur. Yani, *matrislerin toplamı birleşme özelliğine sahiptir.*

**A** *matrisinin* $\lambda$ *sayıyla çarpımı,* elemanları $d_{ij} = \lambda a_{ij}$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ olarak belirlenen $\mathbf{D} = [d_{ij}]_{mn}$ matrisiyle ifade edilir ve

$$D = \lambda A = [\lambda a_{ij}]_{mn} \qquad \text{veya} \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

olarak gösterilir. Tanımdan görüldüğü gibi, *matris bir sayıyla çarpıldığında, bütün elemanları sözü edilen sayıyla çarpılır.* Örneğin,

$$4 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 0 & 20 \\ 0 & 16 & -12 & 8 \\ 4 & -8 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

eşitliği doğrudur.

Matrislerin toplamı ve sayıyla çarpımı tanımlarından,

$$\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B} \qquad \text{ve} \qquad (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{A} + \lambda_2\mathbf{A}$$

eşitliklerinin doğruluğu görülmektedir. Yani, *matrislerin toplamı, sayı ile çarpıma göre dağılma özelliğine sahiptir.*

Matrisin sayıyla çarpımı tanımından görülebileceği gibi, *matrisin bütün elemanları aynı çarpana sahipse, sözü edilen çarpan matris işareti dışına alınabilir, yani,*

$$\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ yani}$$

$$[\lambda a_{ij}]_{mn} = \lambda [a_{ij}]_{mn}$$

eşitliği doğrudur. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 \\ 6 & -12 & 15 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

olur.

$\lambda = -1$ durumunda, $m \times n$ boyutlu **B** matrisi için

$$-\mathbf{B} = (-1)\mathbf{B} = [-b_{ij}]_{mn}$$

olur ve $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-1)\mathbf{B}$ olduğundan, aynı boyutlu **A** ve **B** matrislerinin farkı

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=[a_{ij}-b_{ij}]_{mn}$$

şeklinde bulunur.

**A** matrisinin sütun sayısı **B** matrisinin satır sayısına eşitse, yani,

$$\mathbf{A}=[a_{is}]_{mk}, \qquad \mathbf{B}=[b_{sj}]_{kn}$$

ise, **A** matrisine, **B** matrisiyle *uyumlu matris* denir. Açıktır ki, **A** matrisi **B** ile uyumlu olduğunda, **B** matrisi **A** ile uyumlu olmayabilir. **B**'nin de **A** ile uyumlu olması için $m = n$ olması gerekir. Demek ki, yalnız aynı boyutlu kare matrisler birbiriyle uyumludur.

Örneğin,

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -5\\ 0 & 1 & -2\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix} \qquad (\alpha)$$

olduğunda, **A** matrisi **B** ile uyumlu $(k = 3)$, **B** matrisi ise **A** ile uyumsuzdur.

Uyumlu $\mathbf{A}=[a_{is}]_{mk}$ ve $\mathbf{B}=[b_{sj}]_{kn}$ *matrislerinin çarpımı,* elemanları

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj} \qquad \text{yani} \qquad c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj} \quad (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}) \qquad (4)$$

şeklinde belirlenen $m\times n$ boyutlu $\mathbf{C}=[c_{ij}]_{mn}$ matrisine denir ve $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$ şeklinde yazılır.

Örneğin, $(\alpha)$ eşitlikleriyle belirlenen **A** ve **B** matrislerinin çarpımı,

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB}=$$

$$\begin{bmatrix}2\cdot(-2)+3\cdot 0+4\cdot 3 & 2\cdot 3+3\cdot 1+4\cdot(-1) & 2\cdot(-5)+3\cdot(-2)+4\cdot 2\\ 0\cdot(-2)+1\cdot 0+2\cdot 3 & 0\cdot 3+1\cdot 1+2\cdot(-1) & 0\cdot(-5)+1\cdot(-2)+2\cdot 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8 & 5 & -8\\ 6 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

olur.

$\mathbf{A}=[a_{is}]_{mk}$ ve $\mathbf{O}=[0]_{kn}$ ya da $\mathbf{O}=[0]_{mk}$ ve $\mathbf{B}=[b_{sj}]_{kn}$ matrislerinin çarpımının $\mathbf{O}=[0]_{mn}$ yani sıfır matris olacağı tanımdan görülmektedir. Örneğin,

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & -3 & -5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

olduğu açıktır.

Tanımdan görüldüğü gibi, *matrislerin çarpımı değişme özelliğine sahip değildir* önermesi doğrudur. Gerçekten, **A** matrisi **B** ile uyumlu, **B** matrisi ise **A** ile uyumsuzsa, o zaman, **AB** çarpımı tanımlı, **BA** çarpımı ise tanımsızdır. **A** ve **B**, aynı basamaktan kare matrisler olduğunda ise söylenen önermenin doğruluğu aşağıdaki örnekten görülmektedir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ise}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{yani} \qquad \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

Matrislerin çarpımının değişme özelliğine sahip olmamasına rağmen, $\mathbf{A}_n$ kare matrisiyle, $\mathbf{E}_n$ birim matrisinin çarpımı için aşağıdaki eşitliklerin doğruluğu kolaylıkla gösterilebilir:

$$\mathbf{A}_n\mathbf{E}_n = \mathbf{E}_n\mathbf{A}_n = \mathbf{A}_n$$

**A** ve **B** matrisleri aynı boyutlu olup **C** ile uyumlu olduğunda,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

eşitliklerinin doğruluğu ispatlanabilir; yani, *matrislerdeki çarpma işlemi, toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliğine sahiptir.*

**A** matrisi **B** ile, **B** matrisi ise **C** ile uyumlu olduğunda,

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

eşitliğinin doğruluğu, yani *matrislerin çarpımının birleşme özelliğine sahip olduğu* da ispatlanabilir.

Açıktır ki, her kare matris kendisiyle çarpılabilir, yani,

$$\mathbf{AA} = \mathbf{A}^2,\ \mathbf{AAA} = \mathbf{A}^3, \ldots, \qquad \mathbf{AAA}\cdots\mathbf{A} = \mathbf{A}^k \ (k \text{ sayıda çarpan})$$

eşitlikleri doğrudur. Örneğin,

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ için}$$

$$A_2^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22} & a_{21}a_{12} + a_{22}^2 \end{bmatrix}$$

olur.

**A** matrisinin bütün satırları, sırasıyla onun sütunlarıyla değiştirildiğinde, elde edilen matrise **A**'nın *devirim* (*transpozisyon*) *matrisi* denir ve $\mathbf{A}^T$ ile gösterilir:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Örneğin,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{için} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

olur.

Devirim matrisin tanımından,

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

olacağı açıktır.

Kare matrisin devirim matrisinin de aynı basamaktan kare matris, $m \times n$ boyutlu matrisin devirim matrisinin ise $n \times m$ boyutlu matris olacağı açıktır. Bu nedenle, her zaman $\mathbf{A}$ matrisi $\mathbf{A}^T$ ile, $\mathbf{A}^T$'de $\mathbf{A}$ ile uyumludur, yani $\mathbf{AA}^T$ ve $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ çarpımları tanımlıdır. Üstelik, $\mathbf{A}$ matrisi $m \times n$ boyutlu olduğunda, $\mathbf{AA}^T$, $m$ basamaklı, $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ matrisi ise $n$ basamaklı kare matrislerdir. Ayrıca, *keyfi bir matrisin kendi devirim matrisiyle çarpımının simetrik matris olacağı* kolaylıkla ispatlanabilir. Örneğin,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{için}$$

$$\mathbf{AA}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -9 & 6 \\ -9 & 46 & -4 \\ 6 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$

olur.

İki matrisin çarpımının devirim matrisi için

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

özelliğinin doğruluğu, matrislerin çarpımı ve eşitliği tanımlarından görülmektedir.

Alt üçgen matrisin devirim matrisinin, üst üçgen matris, üst üçgen matrisin devirim matrisinin ise alt üçgen matris olacağı açıktır. Ayrıca, köşegen matrisin devirim matrisi kendisine eşittir. Bu nedenle, birim matris için

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{E}_n^T$$

yazılabilir.

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

köşegen matrislerinin çarpımının,

$$\mathbf{A}_n\mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklinde köşegen matris olacağı açıktır.

*Satır matrisin devirim matrisinin sütun matris, sütun matrisin devirim matrisinin ise satır matris olacağı açıktır.* Bu nedenle,

$$\mathbf{A}_{sr}\mathbf{A}_{sr}^T = \left[a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{1n}^2\right]$$

ve

$$\mathbf{A}_{sn}\mathbf{A}_{sn}^T = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{21} & \dots & a_{11}a_{n1} \\ a_{21}a_{11} & a_{21}^2 & \dots & a_{21}a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}a_{11} & a_{n1}a_{21} & \dots & a_{n1}^2 \end{bmatrix}$$

olur. Demek ki, *keyfi bir satır matrisin kendi devirim matrisiyle çarpımı bir basamaklı matris,* yani tek elemanlı matris; *n satırlı sütun matrisin kendi devirim matrisiyle çarpımı ise n basamaklı simetrik matristir.*

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 1.1 için)

**1.** Verilen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri için aşağıdaki işlemleri yapın:

(a) $\mathbf{AB}$ (b) $\mathbf{AC}$ (c) $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ (d) $\mathbf{B}^T\mathbf{C}$ (e) $\mathbf{CA}^T$

2. Matrislerin çarpımı kuralını ve eşitliği koşulunu kullanarak,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

eşitliğinden, $x_1, x_2, x_3$ arasındaki ilişkileri bulun.

3. Verilen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

üçgen matrisleri için aşağıdaki işlemleri yapın:

(a) $\mathbf{AB}$ (b) $\mathbf{BA}$ (c) $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ (d) $\mathbf{B}^T\mathbf{A}$ (e) $\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$ (f) $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

4. Verilen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

matrisleri için aşağıdaki çarpımları bulun.

(a) $\mathbf{AB}$ (b) $\mathbf{AD}$ (c) $\mathbf{BD}$ (d) $\mathbf{CA}$ (e) $\mathbf{CB}$ (f) $\mathbf{CD}$

(g) $\mathbf{DC}$ (h) $\mathbf{CC}^T$ (i) $\mathbf{C}^T\mathbf{C}$ (j) $\mathbf{DD}^T$ (k) $\mathbf{D}^T\mathbf{D}$

## 1.2 İKİ BASAMAKLI DETERMİNANT VE ÖZELLİKLERİ

İki basamaklı

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

kare matrisinin elemanlarından oluşan $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ sayısına $\mathbf{A}_2$ *matrisinin determinantı*[1] veya *iki basamaklı determinant* denir ve

[1] Determinant sözcüğü, Latince "determinarius" sözcüğünden türetilmiştir ve "belirleyici" anlamındadır.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Tanıma göre,

$$\det \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

yazılabilir. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ farkına, *iki basamaklı determinantın açılım* veya *hesaplanma formülü* denir.

Örneğin, tanıma göre,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) = 10 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 3 - 4 \cdot 0 = -6$$

olur.

Determinantları, $\Delta$, $\Delta_1$, $\Delta_2$ vb. şeklinde de göstereceğiz.

**Uyarı 1** Her sayı, bir basamaklı determinant olarak tanımlanabilir. Örneğin, $a$ sayısı bir basamaklı determinant olarak

$$\Delta = |a| = a$$

şeklinde yazılabilir (burada $|\cdot|$ işareti, mutlak değer işareti değil bir basamaklı determinant işaretidir).

Determinantın tanımından onun aşağıdaki özellikleri elde edilir.

**Özellik 1** Herhangi bir $\mathbf{A}$ matrisiyle onun devirimi olan $\mathbf{A}^T$ matrisinin determinantları birbirine eşittir, yani,

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \det \mathbf{A}^T$$

eşitliği doğrudur.

Bu özellikten görüldüğü gibi, *determinantın satırlarıyla sütunları aynı özelliktedir.* Yani, *determinantın satırları için doğru olan her bir özellik, onun sütunları için de doğrudur ve tersine.*

**Özellik 2** Determinantın iki satırının (sütununun) yeri değiştirildiğinde, determinantın yalnızca işareti değişir, yani,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

eşitlikleri doğrudur.

**Sonuç 1** İki satırı (sütunu) aynı olan determinantın değeri sıfıra eşittir, yani,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = 0$$

eşitlikleri doğrudur.

**Özellik 3** Determinantın herhangi bir satırı (sütunu) ortak $\lambda$ çarpanına sahipse, $\lambda$ çarpanı determinant dışına alınabilir.

Örneğin,

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

eşitliği doğrudur.

**Sonuç 2** Determinantın iki satırının (sütununun) elemanları orantılı ise, determinantın değeri sıfırdır.

**Sonuç 3** Determinantın herhangi bir satırının (sütununun) bütün elemanları sıfır ise, determinantın değeri sıfırdır.

Örneğin,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

eşitliği doğrudur.

**Sonuç 4** Determinantı belli bir $\lambda$ sayısıyla çarpmak için, onun herhangi bir satırının (sütununun) bütün elemanlarını $\lambda$ sayısıyla çarpmak yeterlidir.

Örneğin,

$$\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix}$$

eşitliği doğrudur.

**Özellik 4** Determinantın herhangi bir satırının (sütununun) bütün elemanları iki elemanın toplamı ise, determinant aşağıdaki kuralla, iki determinantın toplamı şeklinde gösterilebilir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} + a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

**Özellik 5** Determinantın herhangi bir satırının (sütununun) bütün elemanları aynı $\lambda$ sayısıyla çarpılıp diğer bir satırın (sütunun) elemanları üzerine sırasıyla eklendiğinde determinantın değeri değişmez.

Örneğin,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + \lambda a_{11} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda a_{21} \end{vmatrix}$$

eşitliği doğrudur.

**Uyarı 2** İki basamaklı matris ve iki basamaklı determinantın tanımlarından görüldüğü gibi, bunlardan birincisi çizelge, ikincisi ise sayıdır. Bu nedenle, matris hesaplanamaz, determinant ise hesaplanır. Ayrıca, matrisler için tanımlanan işlem kuralları, determinantlar için aynen geçerli değildir.

Örneğin,

$$4 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \det\begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 16$$

olmasına rağmen,

$$4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \det\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 4(3 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = 4$$

olduğu açıktır.

Determinantların değeri sayı olduğundan, bunlar için (yani, değerler için) bütün aritmetik işlemler ve özellikleri (değişme, dağılma, birleşme vb. özellikleri) geçerlidir.

Örneğin,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}$$

eşitlikleri doğrudur.

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 1.2 için)

1. Tanıma dayanarak, iki basamaklı determinantların bütün özelliklerini ve bunların sonuçlarını inceleyin.
2. Aşağıdaki determinantları hesaplayın:

(a) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}$

3. Aşağıdaki determinantları iki determinantın toplamı şeklinde yazın.

(a) $\begin{vmatrix} a_{11}+5 & a_{12} \\ a_{21}+3 & a_{22} \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} a_{11}-5 & a_{12} \\ a_{21}-3 & a_{22} \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix}$

## 1.3 YÜKSEK BASAMAKLI DETERMİNANTLAR

Üç basamaklı

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1}$$

kare matrisi verilmiş olsun. $\mathbf{A}_3$ matrisinde herhangi $a_{ij}$ $(i, j = 1,2,3)$ elemanının bulunduğu satır ve sütunun ($i$.satır, $j$.sütun) alınıp, geride kalan elemanların diziliş sırasını bozmadan oluşturulan determinanta, $A_3$ *matrisinin* $a_{ij}$ *elemanının minörü* denir ve $M_{ij}$ ile gösterilir. Örneğin $i = 1, j = 2$ alırsak, $a_{12}$ elemanının minörü,

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

olur.

$M_{ij}$ minörünün $(-1)^{i+j}$ ile çarpımına, yani $(-1)^{i+j} M_{ij}$ 'ye $a_{ij}$ *elemanının eşçarpanı (cofactor)* denir ve $A_{ij}$ ile gösterilir:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Tanımdan görüleceği gibi,

$$A_{ij} = \begin{cases} M_{ij} & \text{eğer } i+j \text{ çift ise,} \\ -M_{ij} & \text{eğer } i+j \text{ tek ise} \end{cases}$$

eşitliği doğrudur. Örneğin, $a_{22}$ elemanının minörü ve eşçarpanı için,

$$A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

eşitliği, $a_{12}$ elemanının minörü ve eşçarpanı içinse,

$$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

eşitliği doğrudur.

**Uyarı** İki basamaklı

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

matrisinin $a_{11}, a_{12}, a_{21}$ ve $a_{22}$ elemanlarının minörleri, sırasıyla $a_{22}, a_{21}, a_{12}$ ve $a_{11}$, eşçarpanları ise $a_{11}, -a_{12}, -a_{21}$ ve $a_{22}$ sayılarıdır. Örneğin,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisinin elemanlarının minörleri ve eşçarpanları aşağıdaki şekildedir:

| Eleman | Minör | Eşçarpan |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 4 |
| −3 | 2 | −2 |
| 2 | −3 | 3 |
| 4 | 1 | 1 |

Sayısal matrisin bütün minör ve eşçarpanlarının sayılar olacağı açıktır.

$A_3$ matrisinin birinci satır elemanlarının eşçarpanları, sırasıyla $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{13}$ olsun.

**Tanım** $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ sayısına, *üç basamaklı determinant* (veya $\mathbf{A}_3$ *matrisinin determinantı*) denir ve $\Delta$ (veya $\Delta(\mathbf{A}_3)$ veya $\det(\mathbf{A}_3)$) ile gösterilip,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \tag{2}$$

şeklinde yazılır.

(2) eşitliğinde,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

olduğunu göz önüne alırsak,

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22} \quad (3)$$

olur.

(3) eşitliğine, *üç basamaklı determinantın hesaplama formülü* denir. Formülden görüldüğü gibi, hesaplama işlemi aşağıdaki şekilde grafikleştirilebilir:

Burada, düz çizgilerle birleştirilen elemanlar çarpılıp kendi işaretleriyle, kesik çizgilerle birleştirilen elemanlarsa çarpılıp ters işaretleriyle yazılır. Üç basamaklı determinantların hesaplandığı bu yönteme *üçgen kuralı* denir. Örneğin,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 \cdot 0$$

$$- (-1) \cdot 5 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 0 = -49$$

olur.

Yukarıda söylenenlere benzer şekilde, dört basamaklı

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

matrisinin birinci satır elemanlarının, sırasıyla kendi

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad A_{14} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

eşçarpanlarıyla çarpımlarından oluşan, $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$ toplamına, *dört basamaklı determinant* denir ve $\Delta$ (veya $\Delta(\mathbf{A}_4)$ veya $\det(\mathbf{A}_4)$) ile gösterilip,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} \tag{4}$$

şeklinde yazılır.

Böylece, ardarda 5, 6 vb. $n-1$ basamaklı determinantlar tanımlanabilir.

Şimdi, $n$ basamaklı,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisini ve onun birinci satır elemanlarının $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1n}$ eşçarpanlarını ($n-1$ basamaklı determinantlar) ele alalım.

**Tanım** $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$ sayısına, *$n$ basamaklı determinant* denir ve $\Delta$ (veya $\Delta(\mathbf{A}_n)$ veya $\det(\mathbf{A}_n)$) ile gösterilip,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} \tag{5}$$

şeklinde yazılır.

$n$ basamaklı determinantın bu tür tanımı, tümevarımsaldır. Yani, üç basamaklı determinant iki basamaklı determinantların yardımıyla, dört basamaklı determinant üç basamaklı determinantların yardımıyla $n$ basamaklı determinant $n-1$ basamaklı determinantların yardımıyla tanımlanmaktadır. Bu nedenle, *iki basamaklı determinantların bütün özellikleri ve bunların sonuçları, $n$ ($n \geq 2$) basamaklı determinantlar için* de *doğrudur* (Bölüm 1.2'ye bakınız). $n$ basamaklı $\Delta(\mathbf{A}_n)$ determinantının minör ve eşçarpanları, $\mathbf{A}_n$ matrisinin minör ve eşçarpanlarına özdeş olarak tanımlanır. Yani, $\mathbf{A}_n$ matrisinin ve $\Delta(\mathbf{A}_n)$ determinantının $a_{ij}$ elemanının minörü aynı $M_{ij}$ determinantı, eşçarpanı ise aynı $A_{ij}$ determinantıdır. *$n$ basamaklı determinantın esas ve yan köşegenleri* de $n$ basamaklı matristeki gibi tanımlanır. $n \geq 4$ olduğunda, $n$ basamaklı determinantların hesaplanması için, üçgen kuralına benzer kural yoktur. Bu nedenle,

genelde yüksek basamaklı ($n \geq 4$) determinantların hesaplanması tanıma dayanır, yani, (5) formülünün yardımıyla hesaplanır.

(5) eşitliğinden görüldüğü gibi, *n basamaklı determinantın değeri, bunun birinci satır elemanlarının kendi eşçarpanlarıyla çarpımlarının cebirsel toplamına eşittir.*

Örneğin,

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-23) = 48$$

olur.

Benzer şekilde, beş basamaklı determinantı hesaplamak için, önce onu dört basamaklı determinantların, sonra da dört basamaklı determinantları üç basamaklı determinantların toplamı şeklinde yazmak gerekir. Görüldüğü gibi, yüksek basamaklı determinantların bu yöntemle hesaplanması bayağı yorucudur. Bu nedenle, yüksek basamaklı determinantların hesaplanmasını kolaylaştıran yöntemlere gereksinim vardır. Bu tür yöntemlere ulaşmak için önce, sık sık kullanılan, doğruluğu ise determinantın tanımı ve özelliklerinden elde edilen aşağıdaki teoremleri verelim (ispatı okuyuculara bırakılmıştır).

**TEOREM 1** Determinantın değeri, onun herhangi bir satır (sütun) elemanlarının kendi eşçarpanlarıyla çarpımlarının cebirsel toplamına eşittir, yani,

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i = \overline{1,n}) \tag{6}$$

yahut

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (j = \overline{1,n}) \tag{6'}$$

eşitlikleri doğrudur.

$i = 1$ durumunda, (6) eşitliği, (5) eşitliğine dönüşür.

Bu teoremden aşağıdaki sonuç çıkıyor.

**Sonuç** Determinantın herhangi bir satırında (sütununda) sıfırdan farklı yalnız bir eleman varsa, o zaman determinantın değeri, sözü edilen elemanla onun eşçarpanının çarpımına eşittir.

Sonucun doğruluğu (6) (veya (6′)) eşitliğinden görülmektedir. Örneğin, $a_{21} \neq 0, a_{2j} = 0$ $(j = \overline{2,n})$ ise, o zaman (6) eşitliği

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21}$$

şeklini alır.

---

**ÖRNEK 1**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-2 \cdot (-1)^{2+2}1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-3) = 6.$$

---

**TEOREM 2** Determinantın herhangi bir satır (sütun) elemanlarının, sırasıyla farklı bir satır (sütun) elemanlarının eşçarpanlarıyla çarpımlarının cebirsel toplamı sıfıra eşittir, yani,

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0 \qquad (i,k = \overline{1,n}, i \neq k) \qquad (7)$$

yahut

$$a_{1j}A_{1s} + a_{2j}A_{2s} + \cdots + a_{nj}A_{ns} = 0 \qquad (j,s = \overline{1,n}, \mathrm{j} \neq s) \qquad (7')$$

eşitliği doğrudur.

---

**TEOREM 3** Determinantın esas köşegeninin altında (üstünde) kalan bütün elemanlar sıfır ise, o zaman determinantın değeri, esas köşegen üzerindeki elemanların çarpımına eşittir, yani,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

ve

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

eşitlikleri doğrudur.

Teoremin doğruluğu yukarıdaki sonuçtan görülmektedir.

Yüksek basamaklı determinantların hesaplanmasında, aşağıdaki kural sık sık kullanılmaktadır.

Determinantın özellikleri (özellikle, Özellik 5) kullanılarak, *keyfi determinant, esas köşegenin altında veya üstünde kalan bütün elemanlar sıfır olacak şekilde dönüştürülebilir.*

**ÖRNEK 2** Aşağıdaki determinantları hesaplayın.

$$\text{(a)}\ \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)}\ \Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

○ **(a)** Hesaplamanın sadeliği için, ilk önce, 1. ve 3. sütunların yerini değiştirelim (Özellik 2'ye göre determinantın yalnızca işareti değişir), daha sonra ise yeni 1. sütunun bütün elemanlarını, önce $-3$ ile çarpıp 2. sütunun, sonra $-2$ ile çarpıp 3. sütunun elemanlarıyla sırasıyla toplayalım (Özellik 5'e göre, determinantın değeri değişmez):

$$\Delta_4 = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 19 & 13 & 2 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Yeniden, son determinantın 2. ve 3. satırlarının yerlerini değiştirip, elde edilen determinantın 2. sütununu –5 ile çarpıp 3. sütunun, 5 ile çarpıp 4. sütunun elemanlarıyla sırasıyla toplayalım:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \\ -5 & 19 & 13 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & 19 & -82 & 97 \\ 2 & -3 & 15 & -18 \end{vmatrix}$$

Son determinantın 3. sütununu 97/82 ile çarpıp 4. sütunun elemanlarıyla sırasıyla toplarsak,

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & 19 & -82 & 0 \\ 2 & -3 & 15 & -21/82 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-82) \cdot (-21/82) = -21$$

yani, $\Delta_4 = -21$ olur (amaç yukarıda söylenen kuralı ve Teorem 3'ü kullanmak olduğundan, hesaplamada birinci dönüşümden sonra elde edilen determinanta yukarıdaki sonucu uygulamadık);

**(b)** Önce, bütün sütunları birinci sütunla toplayıp, elde edilen $n+1$ ortak çarpanını determinant dışına alalım:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2+(n-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2+(n-1) & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 2+(n-1) & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 2+(n-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Son determinantın 1. sütununu, sırasıyla 2., 3. vb. $n$. sütunlardan çıkarırsak,

$$\Delta_n = (n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = (n+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= n+1$$

yani, $\Delta_n = n+1$ olur. ○

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

şeklindeki determinant, *Vandermonde*[1] *determinantı* diye adlandırılır. Bu determinant, kuramsal önem taşır ve çeşitli durumlarda karşılaşılır. $n = 2$ durumunda,

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

$n = 3$ durumunda ise,

$$V_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

elde edilir. Sırasıyla üçüncü sütundan ikinci sütunun, ikinci sütundan ise birinci sütunun $x_1$ ile çarpımını çıkarırsak,

$$V_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1x_2 \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) \\ x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) \end{vmatrix} =$$

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

yani,

$$V_3 = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

elde ederiz.

Benzer şekilde, biçimsel olarak,

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1})$$

yazılabilir.

Vandermonde determinantı

$$V_n = V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

şeklinde de yazılır.

---

[1] Alexandre Theophille Vandermonde (1736 – 1796) – Fransız matematikçi.

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 1.3 için)

**1.** Aşağıdaki üç basamaklı determinantları hesaplayın.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 13 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 12 & 27 & 5 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 6 & 13 & -2 \\ 5 & 37 & -5 \\ 1 & 13 & -2 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.6 \\ 2.2 & -0.3 & 2.5 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -8 \\ 0 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} a^2+b^2 & bc & ac \\ bc & a^2+c^2 & ab \\ ac & ab & b^2+c^2 \end{vmatrix}$ (g) $\begin{vmatrix} 2 & -7 & 10 \\ 1 & -3 & 5 \\ -2 & -7 & 4 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

**2.** Aşağıdaki determinantları hesaplayın.

(a) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 1 & 14 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 7 & 2 & 4 \\ -6 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 8 & 2 \end{vmatrix}$

3. Herhangi iki satırı (sütunu) orantılı olduğunda determinantın değerinin sıfır olduğunu gösterin.
4. $n$ basamaklı determinantın satırlarının (sütunlarının) diziliş sırası tersine değiştirildiğinde, determinantın değeri nasıl değişir?

## 1.4 TERS MATRİS. MATRİSİN RANKI

### 1.4.1 Ters Matris.

$n$ basamaklı $\mathbf{A}_n = [a_{ij}]_n$ matrisi verilmiş olsun.

**Tanım 1** $\mathbf{B}_n\mathbf{A}_n = \mathbf{A}_n\mathbf{B}_n = \mathbf{E}_n$ eşitliğini sağlayan $n$ basamaklı $\mathbf{B}_n$ matrisine, $\mathbf{A}_n$ matrisinin *ters matrisi* veya *tersi* denir ve $\mathbf{A}_n^{-1}$ ile gösterilir.

Tanıma göre,

$$\mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{A}_n = \mathbf{A}_n\mathbf{A}_n^{-1} = \mathbf{E}_n \tag{1}$$

yazabiliriz. Örneğin,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisleri için

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_2$$

olduğundan, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ ve $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$ eşitlikleri doğrudur, yani $\mathbf{B}$ matrisi $\mathbf{A}$'nın, $\mathbf{A}$ matrisi de $\mathbf{B}$'nin tersidir.

Şimdi, matrisin tersinin hangi durumlarda varolduğunu ve varoluş durumunda onun bulunma yöntemini inceleyelim.

**Tanım 2** $\mathbf{A}_n$ matrisinin $a_{ij}$ elemanlarının $A_{ij}$ eşçarpanlarından oluşan

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisine, $\mathbf{A}_n$ 'nin *ek matrisi* denir ve $\mathbf{A}_n^E$ ile gösterilir.

**Tanım 3** Determinantı sıfırdan farklı olan matrise *düzgün matris,* determinantı sıfır olan matrise ise *tekil matris* denir.

Örneğin,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisleri için $\det \mathbf{A} = -1 \neq 0$, $\det \mathbf{C} = 0$ olduğundan, $\mathbf{A}$ matrisi düzgün, $\mathbf{C}$ matrisi ise tekil matristir. Üstelik, $\mathbf{A}$ matrisinin 1, 2, 3 ve 5 elemanlarının eş-çarpanları, sırasıyla $A_{11} = 5$, $A_{12} = -3$, $A_{21} = -2$ ve $A_{22} = 1$ olduğundan, $\mathbf{A}$'nın ek matrisi

$$A^E = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

**TEOREM 1** Düzgün $\mathbf{A}_n$ matrisinin ters matrisi vardır ve bu,

$$\mathbf{A}_n^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}_n} \mathbf{A}_n^E \quad \text{yani,} \quad \mathbf{A}_n^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}_n} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

şeklindedir.

İspat için, $\mathbf{A}_n \mathbf{A}_n^{-1}$ çarpımını yazıp Bölüm 1.3'teki Teorem 2 ve Teorem 3'ü uygulamak yeterlidir.

---

**ÖRNEK 1** Aşağıdaki matrislerin ters matrislerinin varlığını inceleyin ve tersleri varsa bulun.

$$\text{(a) } \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(b) } \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(c) } \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

○ **(a)** $\det \mathbf{A}_2 = 5 \neq 0$ olduğundan $\mathbf{A}_2$ matrisinin tersi vardır; $A_{11} = 2$, $A_{12} = 3$, $A_{21} = 1$, $A_{22} = 4$ olduğuna göre,

$$\mathbf{A}_2^E = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

olur ve (2) eşitliğine göre,

$$\mathbf{A}_2^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$$

elde edilir;

**(b)** $\det \mathbf{A}_3 = 10 \neq 0$ olduğundan yine ele alınan matrisin tersi vardır. $A_{11} = 1$, $A_{12} = 3$, $A_{13} = -6$, $A_{21} = 0$, $A_{22} = 0$, $A_{23} = 10$, $A_{31} = 3$, $A_{32} = -1$, $A_{33} = 2$ olduğunu (2) eşitliğinde göz önüne alırsak,

$$\mathbf{A}_3^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -6 & 10 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.3 \\ 0.3 & 0 & -0.1 \\ -0.6 & 1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

**(c)** $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$ olduğundan, $a_{ii}$'lerden $(i = \overline{1,n})$ herhangi biri sıfır olduğunda, $\mathbf{A}_n$ tekil matris olur ve tersi yoktur. $a_{ii} \neq 0$ $(i = \overline{1,n})$ olduğunda ise $\mathbf{A}_n$ düzgün matristir ve tersi vardır.

$$A_{11} = a_{22}a_{33} \cdots a_{nn};\ A_{22} = a_{11}a_{33} \cdots a_{nn};\ldots;\ A_{nn} = a_{11}a_{22} \cdots a_{n-1n-1};$$

$$A_{ij} = 0\ (i, j = \overline{1,n},\ i \neq j)$$

olduğunu (2) eşitliğinde göz önüne alırsak,

$$\mathbf{A}_n^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}}\begin{bmatrix} a_{22}a_{33} \cdots a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11}a_{33} \cdots a_{nn} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_{11}a_{22} \cdots a_{n-1n-1} \end{bmatrix}$$

yani,

$$\mathbf{A}_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1/a_{nn} \end{bmatrix} \tag{3}$$

olur. ○

---

Örnek 1'in **(c)** seçeneğinden görüldüğü gibi, *düzgün köşegen matrisin tersi de köşegen matristir ve (3) eşitliğiyle belirlenir.*

### 1.4.2 Matrisin Rankı

$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{mn}$ dikdörtgen matrisi verilmiş olsun.

**Tanım 4** $\mathbf{A}$ matrisinin keyfi $k$ $(k \leq \min(m, n))$ sayıda satır ve sütununun kesişmesinde bulunan elemanların oluşturduğu $k$ basamaklı determinanta, $\mathbf{A}$ *matrisinin k basamaklı minörü* denir.

Örneğin,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisi için, $m = 3$, $n = 4$ olduğundan, $k \leq \min(3, 4) = 3$ olur. Demek ki, **A** matrisinin 1, 2 ve 3 basamaklı minörleri vardır. Ayrıca, 1, 3, ... , –1 sayıları, yani matrisin her bir elemanı onun bir basamaklı minörleri,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

determinantları iki basamaklı minörleri,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

ise üç basamaklı minörleridir.

**Tanım 5** **A** matrisinin, sıfırdan farklı minörlerinin en yüksek basamaklısının basamak sayısına, *A matrisinin rankı* denir ve $r = rank\ \mathbf{A}$ olarak gösterilir.

Yukarıda ele alınan matrisin üç basamaklı minörlerinden,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -27 \neq 0$$

olduğu için, $rank\ \mathbf{A} = 3$ 'tür.

Tanımdan görüleceği gibi, $m \times n$ boyutlu matrisin rankı için,

$$0 \leq r \leq \min(m, n)$$

eşitliği doğrudur. Ayrıca, yalnız sıfır matrisin rankı sıfırdır ve matrisin sıfırdan farklı en azından bir elemanı varsa, o zaman $r \geq 1$ 'dir.

---

## ÖRNEK 2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 9 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin rankını hesaplayın.

○ Matrisin şeklinden $1 \leq r \leq 3$ olduğu açıktır. Bu nedenle, önce iki basamaklı minörlerden sıfırdan farklısının olup olmadığını belirleyelim.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = 33 \neq 0$$

olduğundan, $r \geq 2$ 'dir. Üç basamaklı minörler içerisinde sıfırdan farklı olanı varsa, bu, kesinlikle ele alınan matrisin dördüncü sütununu kapsamalıdır (neden?). Sözü edilen minörler,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 9 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 9 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan, $r = 2$ olur. ○

---

Matrisin satırlarının (sütunlarının) yerlerinin değiştirilmesi, satırının (sütununun) bütün elemanlarının sıfırdan farklı bir sayıyla çarpımı ve herhangi satırın (sütunun) bütün elemanlarını belli bir sayıya çarpıp, diğer bir satırın (sütunun) uygun elemanlarıyla toplam işlemleri, matrislerde *elemanter dönüşümler* diye adlandırılır.

Rank tanımından ve determinantın özelliklerinden görüleceği gibi:

a) *Elemanter dönüşümler matrisin rankını değiştirmez;*

b) *Matrisin $k$ basamaklı bütün minörleri sıfıra eşitse, o zaman onun $k+1$, $k+2$ vb. bütün minörleri de sıfıra eşittir.*

Söylenenleri göz önüne alırsak, matrisin rankını hesaplamak için aşağıdaki kuralı söyleyebiliriz.

Elemanter dönüşümleri kullanarak, *keyfi matris, $a'_{11}, a'_{22}, \ldots, a'_{rr}$ elemanları sıfırdan farklı olmak üzere,*

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{22} & \cdots & a'_{1r} & a'_{1r+1} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2r} & a'_{2r+1} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{rr} & a'_{rr+1} & \cdots & a'_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

*şekline dönüştürülebilir ve rankı $r$ olarak bulunur.*

**ÖRNEK 3**

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & -1 & -1 & 6 \\ 4 & -5 & -7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin rankını bulun.

○ Matrisi aşağıdaki şekilde dönüştürelim:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & -1 & -1 & 6 \\ 4 & -5 & -7 & 2 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 4 & -2 & -1 & -1 & 6 \\ -5 & 4 & -7 & 2 & 0 \end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 11 & -1 & -10 \\ 0 & 4 & -22 & 2 & 20 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 11 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Son matrisin rankı 2 olduğundan, *rank* $\mathbf{A}=2$ 'dir. (Dönüşüm sırasıyla aşağıdaki şekilde yapıldı: birinci ve ikinci sütunların yerleri değiştirildi; 1. satır elemanları $-4$ ile çarpılıp, 2., 5 ile çarpılıp 3. satır elemanlarıyla toplandı; 2. satır elemanları 2 ile çarpılıp 3. satır elemanlarıyla toplandı). ○

Şimdi, keyfi

$$\mathbf{A}_{sr}^{(i)}=\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \quad (i=\overline{1,m}) \tag{4}$$

satır matrisleri ve $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ gerçel sayılarının verilmiş olduğunu varsayalım.

**Tanım 6** $\lambda_1\mathbf{A}_{sr}^{(1)}+\lambda_2\mathbf{A}_{sr}^{(2)}+\cdots+\lambda_m\mathbf{A}_{sr}^{(m)}$ toplamına, $\mathbf{A}_{sr}^{(1)},\mathbf{A}_{sr}^{(2)},...,\mathbf{A}_{sr}^{(m)}$ *satır matrislerinin doğrusal bağıntısı* denir.

**Tanım 7** Aynı zamanda hepsi sıfır olmayan $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ sayıları,

$$\lambda_1\mathbf{A}_{sr}^{(1)}+\lambda_2\mathbf{A}_{sr}^{(2)}+\cdots+\lambda_m\mathbf{A}_{sr}^{(m)}=0 \tag{5}$$

eşitliği sağlanacak şekilde varsa, o zaman $\mathbf{A}_{sr}^{(i)}$'lere $(i=\overline{1,m})$ *doğrusal bağımlı satır matrisler* denir. Burada, $0=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ olup, $\mathbf{A}_{sr}^{(i)}$ matrisleriyle aynı boyutludur.

**Tanım 8** (4) eşitliği, yalnız $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_m=0$ olduğunda sağlanırsa, o zaman $\mathbf{A}_{sr}^{(i)}$'lere $(i=\overline{1,m})$ *doğrusal bağımsız (bağımlı olmayan) satır matrisler* denir.

Örneğin, $[1 \quad 3 \quad 5]$, $[-2 \quad 1 \quad 4]$ ve $[-4 \quad 9 \quad 22]$ matrisleri için,

$$2\cdot[1 \quad 3 \quad 5]+3\cdot[-2 \quad 1 \quad 4]+(-1)\cdot[-4 \quad 9 \quad 22]=[0 \quad 0 \quad 0]$$

olduğundan $(\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -1)$, bunlar doğrusal bağımlıdır.

Yukarıdaki kavramlar, benzer şekilde sütun matrisler için de tanımlanabilir.

Satır (sütun) matrisin elemanlarının sayısına, sözü edilen *matrisin uzunluğu* denir. Örneğin, $[1]$, $[2 \quad 0]$, $[3 \quad 1 \quad -2]$ ve $[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_m]$ matrisleri sırasıyla, uzunlukları 1, 2, 3 ve $m$ olan satır matrislerdir.

$\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \ldots, \mathbf{B}_m$ satır veya sütun matrislerinden herhangi biri, örneğin $\mathbf{B}_1$ matrisi, diğerlerinin yardımıyla

$$\mathbf{B}_1 = \alpha_2\mathbf{B}_2 + \alpha_3\mathbf{B}_3 + \cdots + \alpha_m\mathbf{B}_m$$

şeklinde gösterildiğinde, $\mathbf{B}_1$ matrisi, $\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \ldots, \mathbf{B}_m$ *matrislerinin doğrusal bağıntısıdır* denir. Örneğin, $\mathbf{B}_1 = [0 \quad -7 \quad 12 \quad -1]$, $\mathbf{B}_2 = [3 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$, $\mathbf{B}_3 = [-2 \quad -3 \quad 4 \quad -1]$ matrisleri için

$$\mathbf{B}_1 = 2\mathbf{B}_2 + 3\mathbf{B}_3$$

eşitliği sağlandığından, $\mathbf{B}_1$ satır matrisi $\mathbf{B}_2$ ve $\mathbf{B}_3$ satır matrislerinin doğrusal bağıntısıdır.

Açıktır ki, her matrisin satırları (sütunları), satır (sütun) matris olarak kabul edilebilir. Bu nedenle, $m \times n$ boyutlu matrise, $m$ sayıda satır veya $n$ sayıda sütunun oluşturduğu matris gibi bakılabilir. Örneğin, (4) eşitlikleriyle belirlenen $\mathbf{A}_{sr}^{(i)}$ satır matrisleri $(i = \overline{1, m})$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \text{yani} \qquad \mathbf{A} = [a_{ij}]_{mn}$$

matrisini oluşturmaktadır.

**Tanım 9** Rankı $r \neq 0$ olan matrisin sıfırdan farklı $r$ basamaklı minörüne *matrisin temel minörü,* bu minörün yerleştiği *satırlara* (*sütunlara*) ise onun *temel satırları* (*sütunları*) denir.

Örneğin, Örnek 2'de ele alınan $\mathbf{A}$ matrisinin sıfırdan farklı $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}$ minörü onun temel minörü, bu minörün yerleştiği 1. ve 2. satırlar temel satırları, 1. ve 5. sütunlar ise temel sütunlarıdır. Sözü edilen matrisin,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ vb.}$$

iki basamaklı minörleri de sıfırdan farklı olduğundan, bunlara da temel minörler olarak bakabiliriz, dolayısıyla bunların yerleştiği satır ve sütunlar da temel satırlar ve temel sütunlar olur. Bu farklılığa rağmen, *rank* $\mathbf{A} = 2$ ise, o zaman, matrisin iki tane temel satırı, iki tane de temel sütunu vardır ve sıfırdan farklı minörlerden herhangi birinin yerleştiği satırlar (sütunlar), temel satırlar (sütunlar) olarak kabul edilebilir.

Yukarıda söylenenlerden görüleceği gibi, rankı $r$ olan matrisin $r$ sayıda temel satırı ve $r$ sayıda temel sütunu vardır.

Temel minör hakkında aşağıdaki teoremi ispatsız verelim.

**TEOREM 2** Matrisin temel satırları (sütunları) doğrusal bağımsızdır ve matrisin keyfi satırı (sütunu), temel satırların (sütunların) doğrusal bağıntısıdır.

Örneğin, Örnek 2'deki $\mathbf{A}$ matrisi için ($r = 2$), temel minör olarak $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ minörü (yani, 1. ve 3. satırlar ile 2. ve 4. sütunlar sırasıyla temel satırlar ve sütunlar) kabul edildiğinde, matrisin satırları için sırasıyla

$$[3 \quad 2 \quad 1 \quad -2] = 1 \cdot [3 \quad 2 \quad 1 \quad -2] + 0 \cdot [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

$$[9 \quad 6 \quad 3 \quad 5] = 3 \cdot [3 \quad 2 \quad 1 \quad -2] + 11 \cdot [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

$$[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] = 0 \cdot [3 \quad 2 \quad 1 \quad -2] + 1 \cdot [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

eşitlikleri, sütunları içinse,

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

eşitlikleri doğrudur.

Determinantların tanımı ve özelliklerinden görüleceği gibi, *uzunlukları $n$ olan $n$ sayıda satır (sütun) matris doğrusal bağımsız ise, o zaman bunların oluşturduğu matrisin ($n$ basamaklı matris) rankı $n$'dir ve tersine.* Benzer biçimde, *uzunlukları $n$ olan, $n$ sayıda satır (sütun) matris doğrusal bağımlı*

*ise, o zaman bunların oluşturduğu matrisin (n basamaklı matris) rankı n 'den küçüktür ve tersine.* Örneğin, $[1 \quad -2 \quad 5]$, $[0 \quad 1 \quad 0]$ ve $[3 \quad 1 \quad 0]$ satır matrislerinin oluşturduğu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin rankı 3 olduğundan $(\det A = -15 \neq 0)$, sözü edilen satır matrisler doğrusal bağımsızdır.

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 1.4 için)

**1.** Aşağıdaki matrislerin ters matrislerinin varlığını inceleyin, tersi varsa bulun.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

(j) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (k) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (l) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

**2.** Aşağıdaki matrislerin ranklarını hesaplayın.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0-3 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. Aşağıdaki satır matrislerin doğrusal bağımlılığını inceleyin.

(a) $[1 \quad 3 \quad 2]$ ve $[1 \quad 5 \quad 1]$

(b) $[1 \quad 2 \quad 3], [0 \quad 3 \quad 2]$ ve $[-1 \quad 4 \quad 3]$

(c) $[0 \quad 1 \quad 5], [-2 \quad 1 \quad -4]$ ve $[-2 \quad 2 \quad 1]$

(d) $[1 \quad -2 \quad -3], [0 \quad 1 \quad 2]$ ve $[3 \quad 0 \quad 1]$

## 1.5 DOĞRUSAL DENKLEMLER SİSTEMİ

### 1.5.1 Doğrusal Denklemler Sisteminin Çeşitli Şekilleri

Aşağıdaki doğrusal denklemler sistemini göz önüne alalım:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Burada, $a_{ij}$ – gerçel katsayılar, $b_i$ – gerçel bağımsız terimler, $x_j$ – aranan bilinmeyenlerdir $(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$.

$b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ olduğunda (1) sistemine *doğrusal türdeş denklemler sistemi,* $b_i$ 'lerden en azından biri sıfırdan farklı olduğunda ise *türdeş olmayan doğrusal denklemler sistemi* denir.

Genelde,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2}$$

sistemine, (1) *sistemine uygun türdeş (homojen) sistem* de denir.

Görüldüğü gibi, gerek (1) gerekse (2) sistemi, *n bilinmeyenli m denklemden oluşan doğrusal denklemler sistemi* olarak da adlandırılabilir.

Doğrusal denklemler sisteminin katsayılarından oluşan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{yani} \quad \mathbf{A} = [a_{ij}]_{mn}$$

matrisine, sözü edilen sistemin *temel matrisi* denir.

Eğer,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

kabul edersek, matrislerin çarpımı ve eşitliğine dayanarak, (1) ve (2) sistemlerini sırasıyla,

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \tag{1'}$$

ve

$$\mathbf{AX} = \mathbf{0} \tag{2'}$$

şeklinde de yazabiliriz. (1′) ve (2′) yazılışlarına, *doğrusal denklemler sisteminin matris şekli* denir.

**Tanım 1** Denklemler sistemini sağlayan $x_j = \alpha_j$ $(j = \overline{1,n})$ sayılarına *sistemin çözümü (kökleri)* denir ve $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ şeklinde yazılır.

Doğrusal denklemler sisteminin matris şeklini göz önüne alıp, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ çözümünü, gerektiğinde,

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

sütun matrisi şeklinde de yazabiliriz.

**Tanım 2** Çözümü olan sisteme *uyumlu sistem*, çözümü olmayan sisteme ise *uyumsuz sistem* denir.

**Uyarı 1** Denklemi veya denklemler sistemini çözmek, onun varolan bütün köklerini bulmak veya çözümünün olmadığını göstermektir.

Açıktır ki, (2) türdeş denklemler sisteminin, $(0, 0, ..., 0)$ şeklinde çözümü her zaman vardır. Yani, *türdeş denklemler sistemi daima uyumludur.* Türdeş sistemin $(0, 0, ..., 0)$ çözümüne, onun *sıfır çözümü* veya *açık çözümü* denir.

---

**ÖRNEK 1** Doğrusal

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$$

denklem sisteminin $x_1 = 1, x_2 = 2$, yani (1, 2) olmak üzere tek çözümünün olduğu açıktır. Demek ki sistem uyumludur.

---

**ÖRNEK 2** Doğrusal

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 = 3 \end{cases}$$

denklem sisteminin, $x_1 = \alpha, x_2 = (1-\alpha)/2$, yani $(\alpha, (1-\alpha)/2)$ olmak üzere ($\alpha$ keyfi gerçel değerler alabilir) sonsuz sayıda çözümü vardır. Demek ki sistem uyumludur.

---

**ÖRNEK 3** Doğrusal

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

sisteminin hiçbir çözümünün olmadığı açıktır ($2x_1 + x_2$ toplamı, farklı sayılara eşit olamaz). Demek ki sistem uyumsuzdur.

---

**ÖRNEK 4** Türdeş doğrusal

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

sistemlerinin her ikisi de uyumludur. Ancak birincinin yalnız (0, 0) olmak üzere tek çözümü, ikincinin ise $(\alpha, -\alpha/2)$ olmak üzere sonsuz sayıda çözümü vardır ($\alpha$ keyfi gerçel değerler alabilir).

---

Ele alınan örneklerden görüldüğü gibi, türdeş olmayan doğrusal denklemler sisteminin tek çözümü olabilir, sonsuz sayıda çözümü olabilir veya çözümü olmayabilir. Benzer biçimde, doğrusal türdeş denklemler sisteminin tek çözümü (açık çözüm) olabilir veya sonsuz sayıda çözümü olabilir. Demek ki, *doğrusal denklemler sisteminin çözümünde temel sorulardan biri, ele alınan sistemin çözümü var mı, varsa kaç tanedir?* sorusudur.

Önce, ne zaman sistemin çözümü var, yani, sistem ne zaman uyumludur? sorusunu yanıtlayalım. Bunun için, **A** matrisine bağımsız terimlerden oluşan bir sütun daha ekleyip,

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

matrisini oluşturalım. $\mathbf{A}^*$ matrisine, *(1) sisteminin genişletilmiş matrisi* denir. $m \times n$ boyutlu sistemin genişletilmiş matrisinin $m \times (n+1)$ boyutlu olacağı açıktır.

Sistemin uyumlu olup olmadığını belirleyen aşağıdaki teoremi ispatsız verelim.

**TEOREM 1** **(Kronecker[1] – Capelli[2])** (1) doğrusal denklemler sisteminin uyumlu olması için, bunun temel ve genişletilmiş matrislerinin ranklarının eşit olması $(r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*))$ gerek ve yeter koşuldur.

Yukarıda incelenen örneklerin birincisinde $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*) = 2$, ikincisinde $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*) = 1$ (her iki sistem uyumludur), üçüncüsünde ise, $r(\mathbf{A}) = 1$, $r(\mathbf{A}^*) = 2$ (sistem uyumsuzdur) olduğu açıktır.

### 1.5.2 Cramer Kuralı

Şimdi, sistemin uyumlu olması durumunda $(r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*))$, $m$ ve $n$ arasındaki ilişkiye ve $\mathbf{A}$ matrisinin rankına bağlı olarak, (1) sisteminin çözümünün veya çözümlerinin bulunma yöntemini açıklayalım. Bunun için olası $m = n$ ve $r(\mathbf{A}) = n$; $m \neq n$ ve $r(\mathbf{A}) \leq \min(m,n)$; $m = n$ ve $r(\mathbf{A}) < n$ durumlarını tek tek ele alalım.

**1.** $m = n$ *ve* $r(\mathbf{A}) = n$ *durumu.* Bu durumda sistem,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad \text{veya} \quad \mathbf{AX} = \mathbf{B} \tag{3}$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

olarak belirlenir.

Aşağıdaki işaretleri kabul edelim:

---

[1] Leonard Kronecker (1823 – 1891) – Alman matematikçisi.
[2] A. Capelli (1855 – 1910) – İtalyan matematikçisi.

$$\Delta = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix} \tag{4}$$

$\Delta$ determinantına (3) *sisteminin temel determinantı*, $\Delta_i$ 'lere ise *yardımcı determinantları* denir. Görüldüğü gibi, $\Delta$ temel determinantının $i$. sütunu bağımsız terimlerin oluşturduğu sütunlarla değiştirildiğinde $\Delta_i$ yardımcı determinantı elde edilir $(i = \overline{1, n})$.

**TEOREM 2** **(Cramer[3])** $n$ bilinmeyenli, $n$ sayıda denklemden oluşan (3) doğrusal denklemler sisteminin temel determinantı sıfırdan farklı olduğunda, sistemin tek çözümü var ve bu çözüm

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i = \overline{1, n}) \tag{5}$$

eşitlikleriyle belirlenir (burada, $\Delta$ ve $\Delta_i$, (4) eşitlikleriyle tanımlanır $(i = \overline{1, n})$).

(5) eşitliklerine *Cramer formülleri*, çözümün bu formüllerle bulunmasına ise *Cramer kuralı* denir.

❒ $\Delta = \det \mathbf{A} \neq 0$ olduğundan, sistemin temel matrisi düzgündür ve $r(\mathbf{A}) = n$ 'dir. Yani bunun

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

ters matrisi vardır (Bölüm 1. 4'e bakınız).

---

[3] Cabriel Cramer (1704 – 1752) – İsviçreli matematikçi.

(3) eşitliğinin (sistemin matris şeklinin) her iki tarafını soldan $\mathbf{A}^{-1}$ ile çarpıp, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}_n$ ve $\mathbf{E}_n\mathbf{X} = \mathbf{X}$ olduğunu göz önüne alırsak,

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \text{ yani}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_nA_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 / \Delta \\ \Delta_2 / \Delta \\ \vdots \\ \Delta_n / \Delta \end{bmatrix}$$

olur. Buradan, matrislerin eşitlik koşuluna göre, (5) formüllerini elde ederiz (burada, $\Delta_i = b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \ldots + b_nA_{ni}$ olduğu göz önüne alınmıştır. $i = \overline{1,n}$ ).

Çözümün tekliği, süreçten görülmektedir. ❐

**Sonuç** $\mathbf{A}$, düzgün matris olduğunda, $n$ bilinmeyenli, $n$ denklemden oluşan,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

türdeş doğrusal sistemin yalnız sıfır (açık) çözümü vardır.

---

**ÖRNEK 5** Aşağıdaki denklem sistemlerini çözün.

$$\text{(a)} \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 10x_3 = -5 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

○ (a) Sistemin determinantı

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -10 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -46 \neq 0$$

olduğundan, sistemin tek çözümü vardır. Öte yandan,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & -1 & -10 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 46 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -10 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -92$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan, Cramer kuralına göre sistemin çözümü, $x_1 = -1, x_2 = 2$, $x_3 = 0$, yani $(-1, 2, 0)$'dır;

**(b)** Sistemin determinantı

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

olduğundan, sistemin tek çözümü vardır. (Hesaplamada, determinantın 4. sütun elemanlarını ardarda $-2, -2$ ve 1 ile çarparak, sırasıyla 1., 2. ve 3. sütun elemanlarıyla topladık). Benzer yolla,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -1 & 2 \\ 12 & 5 & -3 & 4 \\ 6 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & -1 & 2 \\ 8 & 12 & -3 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 6 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & 5 & 12 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 8 & 5 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ 8 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) = -2$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 3 \\ 8 & 5 & -3 & 6 \\ 3 & 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 8 & 5 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 = -2$$

buluruz. Böylece, sistemin tek çözümü, $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = -1$, yani $(1, 1, -1, -1)$ olarak bulunur. ○

---

**2.** $m \neq n$ *ve* $r(A) < \min(m, n)$; $m = n$ *ve* $r(A) < n$ *durumları.* Genelliği bozmadan, her iki durum için, **A** matrisinin sıfırdan farklı $r$ basamaklı minörünün (böyle minörler çok sayıda olduğunda herhangi birinin) onun ilk $r$ sayıda satır ve sütunun kesişmesinde, yani üst sol köşede yerleştiğini varsayalım. O zaman, matrisin ilk $r$ sayıda satırı (demek ki aynı zamanda matrisin ilk $r$ sayıda denklemi) bağımsız satırlar (denklemler), ötekiler ise bunların doğrusal bağıntısıdır (sonucudur). Bu nedenle, bağımlı satırlara uygun denklemler (eğer varsa) sistemden çıkarılır ve sonuçta $n$ bilinmeyenli, $r$ sayıda denklemden oluşan doğrusal denklemler sistemi elde edilir. Bu sistemin, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ bilinmeyenlerine *temel bilinmeyenler,* $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ bilinmeyenlerine ise (eğer varsa) *bağımsız bilinmeyenler* denir. Bağımsız bilinmeyenleri içeren terimler sağ tarafa alındığında, sistem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{rn1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases} \qquad (1^*)$$

şeklini alır. (1*) sistemi,

$$\Delta = \det A_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

olduğundan, Cramer kuralıyla çözülebilir:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_r = \frac{\Delta_r}{\Delta} \tag{6}$$

Burada, $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ determinantları, bağımsız $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ bilinmeyenlerine bağlıdır. $x_1, x_2, \ldots, x_r$ bilinmeyenleri (6) eşitlikleriyle belirlendiğinde, $(x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n)$ çözümüne *(1) sisteminin genel çözümü* denir. Bağımsız bilinmeyenlerin somut değerlerinde, genel çözümden elde edilen çözümlere ise *(1) sisteminin özel çözümleri* denir. Sözü edilen bağımsız bilinmeyenlere farklı değerler verildiğinde, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ çözümleri için farklı değerler elde edildiğinden, *(1*) sisteminin, dolayısıyla aynı zamanda (1) sisteminin sonsuz sayıda çözümü vardır* sonucuna varırız. *(1*) sisteminde bağımsız bilinmeyenlerin varolmaması durumunda, gerek (1*) gerekse de (1) sisteminin tek çözümü vardır.*

---

**ÖRNEK 6** Aşağıdaki denklem sistemlerinin uyumlu olup olmadığını inceleyin ve uyumlu olduğu durumda çözümünü bulun.

(a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \\ x_1 + 8x_2 = 3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = 0 \end{cases}$

○ (a) $m = 3, n = 2$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ve}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 13 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -117 \neq 0$$

olduğundan, $r(\mathbf{A}) = 2, r(\mathbf{A}^*) = 3$, yani, $r(\mathbf{A}) \neq r(\mathbf{A}^*)$'dir. Demek ki, ele alınan sistem uyumsuzdur;

**(b)** $m = 3, n = 2$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan, $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*) = 2$ 'dir, yani ele alınan sistem uyumludur.

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ olduğundan, $\mathbf{A}$ matrisinin ilk iki satırını (yani, sistemin ilk iki denklemini) temel satırlar (denklemler) olarak kabul edebiliriz. Bu nedenle, sistemin üçüncü denklemini atarak, bunu

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 3 \end{cases}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

olduğunu göz önüne alırsak, Cramer kuralına göre $x_1 = 2, x_2 = -1/2$ buluruz. Böylece, sistemin tek çözümü $(2, -1/2)$ olur;

**(c)** $m = 3, n = 4$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

olduğunu göz önüne alıp $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{A}^*$ matrislerini aşağıdaki şekilde dönüştürelim:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & -5 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Buradan, $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*) = 2$ olduğu açıktır. Yani, ele alınan sistem uyumludur ve $A$ matrisinin ilk iki satır ve sütunu temel satır ve sütunlar olarak kabul edilebilir. Bu nedenle, sistemin üçüncü denklemini göz ardı edip bunu

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

şeklinde, sonra da, $x_3$ ve $x_4$'ü bağımsız bilinmeyenler olarak kabul edip,

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = 6 - 3x_3 - x_4 \\ 3x_1 + 5x_2 = 4 - 2x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -11, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 - 3x_3 - x_4 & 7 \\ 4 - 2x_3 - 2x_4 & 5 \end{vmatrix} = 2 - x_3 + 9x_4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 - 3x_3 - x_4 \\ 3 & 4 - 2x_3 - 2x_4 \end{vmatrix} = -10 + 5x_3 - x_4$$

olduğuna göre,

$$x_1 = -\frac{1}{11}(2 - x_3 + 9x_4), \; x_2 = \frac{1}{11}(10 - 5x_3 + x_4)$$

bulunur. Demek ki, sistemin çözümü sonsuz sayıdadır ve genel çözüm

$$(-(2 - x_3 + 9x_4)/11, \; (10 - 5x_3 + x_4)/11, x_3, x_4)$$

şeklindedir. $x_3$ ve $x_4$'ün her değer çiftine, ele alınan sistemin bir tane özel çözümü karşı gelir. Örneğin, $x_3 = 0, x_4 = 1$ alındığında, sistemin (–1, 1, 0, 1) özel çözümü elde edilir;

**(d)** $m = n = 4$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 3 & 7 \\ 8 & -6 & -1 & -5 \\ 7 & -3 & 7 & 17 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & 0 \end{bmatrix}$$

ve $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*) = 2$ olduğundan (bu, kolaylıkla hesaplanabilir), $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ olduğunu göz önüne alıp, ilk iki satır ve sütunu temel satır ve sütunlar olarak kabul edebiliriz. Bu nedenle, sistemi

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{veya} \quad \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 3 - 2x_3 - 4x_4 \\ 4x_1 - 2x_2 = 1 - 3x_3 - 7x_4 \end{cases}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan,

$$x_1 = -\frac{3 + 5x_3 + 13x_4}{2} \qquad x_2 = -\frac{7 + 7x_3 + 19x_4}{2}$$

buluruz ve genel çözümü,

$$(-(3 + 5x_3 + 13x_4)/2, -(7 + 7x_3 + 19x_4)/2, x_3, x_4)$$

şeklinde yazabiliriz. Demek ki sistemin sonsuz sayıda çözümü vardır ($x_3$ ve $x_4$ bağımsız bilinmeyenlerdir). ○

---

### 1.5.3 Gauss Eleme (Ardarda Yok Etme) Yöntemi

Söz konusu yöntemin özü aşağıdaki gibi açıklanabilir. (1) doğrusal denklemler sistemini çözmek için, önce sistemin genişletilmiş

$$\mathbf{A}^* = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

matrisini (bağımsız terimleri katsayılardan ayırmak için dik çizgi kullanılır) elemanter dönüşümlerin yardımıyla

$$\mathbf{A}^* \to \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} & a'_{1r+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a'_{2r} & a'_{2r+1} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{rr+1} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_m \end{array}\right] \tag{7}$$

şekline dönüştürelim. Burada, $r \leq \min(m, n)$'dir.

(7) matrisinin şeklinden görüldüğü gibi:

(a) $b'_{r+1},...,b'_m$ 'lerden herhangi biri sıfırdan farklı ise, o zaman (1) sisteminin çözümü yoktur (uyumsuzdur);

(b) $b'_{r+1} = ... = b'_m = 0$ ve $r = n$ ise, o zaman (1) sisteminin tek çözümü vardır ve $n$. denklemden başlayarak, ardarda $x_n; x_{n-1},...,x_2,x_1$ bilinmeyenleri bulunur;

(c) $b'_{r+1} = ... = b'_m = 0$ ve $r < n$ ise, o zaman (1) sisteminin sonsuz sayıda çözümü vardır; bu çözümler, $x_{r+1},x_{r+2},...,x_n$ bağımsız bilinmeyenlerine bağlı olarak, $r$. denklemden başlayarak $x_r,x_{r-1},...,x_2,x_1$ olmak üzere ardarda bulunur ve $(x_1,x_2,...,x_r,x_{r+1},...,x_n)$ genel çözümü yazılır.

Doğrusal denklem sisteminin yukarıda açıklanan yöntemle çözümüne *Gauss eleme (ardarda yok etme) yöntemi* denir.

Söylenenleri ayrıntılı olarak örneklerle açıklayalım.

---

**ÖRNEK 7** Aşağıdaki doğrusal denklem sistemlerini Gauss eleme yöntemiyle çözün.

(a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 - 5x_4 = -10 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3 \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 11x_4 = 1 \end{cases}$

○ (a) Sistemin genişletilmiş matrisini yazıp, aşağıdaki şekilde dönüştürelim:

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & -11 \\ 0 & 4 & -2 & -2 & -8 \\ 0 & 8 & -4 & -4 & -15 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & -11 \\ 0 & 4 & -2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/4 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Son matriste $b_4' = 1 \neq 0$ olduğundan sistem uyumsuzdur, yani çözümü yoktur (**a** seçeneği). Matriste dönüşüm yaparken, 1. adımda, 1. satır elemanlarını ardarda $-2$, $-1$, ve $-3$ ile çarpıp sırasıyla 2, 3 ve 4. satır elemanlarıyla; 2. adımda, 3. satır elemanlarını $-2$ ile çarpıp 4. satır elemanlarıyla; 3. adımda, 2. satır elemanlarını $-1$ ile çarpıp 3. satır elemanlarıyla topladık, 4. adımda ise 2. satır elemanlarını 1/4 ile, 3. satır elemanlarını $-1/4$ ile çarptık. (Ele alınan örnek için süreç 2. adımdan sonra durdurulup çözümün olmadığı söylenebilirdi. Sonraki adımları, yöntemin bütünlüğünün tamamlanması için yaptık);

(**b**) Sistemin genişletilmiş matrisini aşağıdaki gibi dönüştürelim.

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 9 \\ 3 & -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -3 & -5 & -10 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 7 & 7 \\ 0 & -14 & 7 & 11 & -2 \\ 0 & -17 & 1 & 7 & -14 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -21/5 & -43/5 & -108/5 \\ 0 & 0 & -63/5 & -84/5 & -189/5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 21 & 43 & 108 \\ 0 & 0 & -21 & -28 & -63 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 21 & 43 & 108 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 45 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4/5 & -7/5 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 & 43/21 & 36/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Son matristen, sistemin tek çözümünün varlığı görülmektedir (**b** seçeneği, $r = n = 4$). Sözü edilen matrise göre, ele alınan sistem, onunla denk olan

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_2 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4 = -\frac{7}{5} \\ x_3 + \frac{43}{21}x_4 = \frac{36}{7} \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

sistemine dönüştürülmüş oluyor. Buradan, ardarda

$$\begin{aligned} x_4 &= 3, \\ x_3 &= \frac{36}{7} - \frac{43}{7} = -1, \\ x_2 &= -\frac{7}{5} - \frac{4}{5} + \frac{21}{5} = 2, \\ x_1 &= 1 - 8 - 1 + 9 = 1, \end{aligned}$$

yani sistemin (1, 2, –1, 3) tek çözümünü buluruz. Dönüşüm yapılırken 1. adımda, 1. satır elemanları sırasıyla –2, –3 ve –4 ile çarpıp 2, 3 ve 4. satır elemanlarıyla; 2. adımda, 2. satır elemanlarını sırasıyla –14/5 ve –17/5 ile çarpıp 3 ve 4. satır elemanları ile topladık; 3. adımda, 3 ve 4. satır elemanlarını sırasıyla –5 ve 5/3 ile çarptık; 4. adımda, 3. satır elemanlarını 4. satır elemanları üzerine ekledik; 5. adımda, 2, 3 ve 4. satır elemanlarını sırasıyla –1/5, 1/21 ve 1/15 ile çarptık;

(c) Genişletilmiş matrisi aşağıdaki gibi dönüştürelim:

$$\mathbf{A}^* = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 5 & -2 & 5 & -4 & 5 \\ 3 & 4 & -7 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & 1 & -11 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -10 & 11 & -10 \\ 0 & 7 & -16 & 11 & -16 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & -16 & 11 & -16 \\ 0 & 3 & -10 & 11 & -10 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 18 & -9 \\ 0 & 0 & -7 & 14 & -7 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Son eşitliğin şeklinden görüldüğü gibi, ele alınan sistem, onunla denk olan

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3 \\ \quad\; x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ \qquad\quad x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

sistemi şeklinde yazılabilir. Buradan, $x_4$ bağımsız değişken olarak kabul edildiğinde, ardarda

$$x_3 = 1 + 2x_4, x_2 = 3x_4, x_1 = 0,$$

yani $(0, 3x_4, 1 + 2x_4, x_4)$ genel çözümünü buluruz. Demek ki sistemin sonsuz sayıda çözümü vardır (c seçeneği, $r = 3 < n = 4$). Bu çözümler, genel çözümde $x_4$'e değişik değerler verilerek elde edilir. Örneğin, $x_4 = 0$ olduğunda $(0, 0, 1, 0)$ özel çözümünü, $x_4 = 1$ olduğunda ise $(0, -3, -1, -1)$ özel çözümünü elde ederiz. Dönüşüm yaparken, 1. adımda 1. satır elemanlarını ardarda –5, –3 ve –2 ile çarpıp sırasıyla 2, 3 ve 4. satır elemanlarıyla topladık; 2. adımda, 4. satır elemanlarını 1/5 ile çarpıp elde edilen satırın yerini 2. satırla değiştirdik; 3. adımda, 2. satır elemanlarını ardarda –7 ve –3 ile çarpıp sırasıyla 3 ve 4. satır elemanlarıyla topladık; 4. adımda, 3. satır elemanlarını –1/9 ile, 4. satır elemanlarını ise 1/7 ile çarptık; 5. adımda, 3. satır elemanlarını 4. satır elemanları üzerine ekledik. ○

---

### 1.5.4 Doğrusal Türdeş Denklemler Sistemi

Doğrusal türdeş denklemler sistemi (2) şeklinde verilmiş olsun. Bilindiği gibi, bu sistemin $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ açık çözümü her zaman vardır, yani uyumludur. Türdeş (2) sisteminin şeklinden, *türdeşlik özellikleri* denilen aşağıdaki iki özelliği görülmektedir:

**(a)** $(x_1, x_2, ..., x_n)$, (2) sisteminin açık olmayan çözümü ise, o zaman $(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$ de onun çözümüdür ($\lambda$ keyfi sabittir);

**(b)** $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)})$ ve $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_n^{(2)})$, (2) sisteminin herhangi iki çözümü ise, o zaman $(x_1^{(1)} + x_1^{(2)}, x_2^{(1)} + x_2^{(2)}, ..., x_n^{(1)} + x_n^{(2)})$ de onun çözümüdür.

Bu iki özellikten görüleceği gibi, *doğrusal türdeş denklemler sisteminin çözümlerinin doğrusal bağıntısı da sözü edilen sistemin çözümüdür.* Yani, $X_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)})$ ve $X_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_n^{(2)})$ çözümlerinin $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = (\lambda_1 x_1^{(1)} + \lambda_2 x_1^{(2)}, \lambda_1 x_2^{(1)} + \lambda_2 x_2^{(2)}, ..., \lambda_1 x_n^{(1)} + \lambda_2 x_n^{(2)})$ doğrusal bağıntısı da, (2) sisteminin çözümüdür ($\lambda_1$ ve $\lambda_2$ keyfi sabitlerdir). Demek ki, *doğrusal türdeş denklemler sisteminin sıfırdan farklı çözümü varsa, çözüm sonsuz sayıdadır.*

Örneğin,

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

sisteminin, $x_1 = -2x_3, x_2 = -x_3$, yani $(-2x_3, -x_3, x_3)$ olmak üzere sonsuz sayıda çözümü vardır ($x_3$, keyfi değerler alabilen bağımsız bilinmeyendir). Bütün bu çözümler, (–2, –1, 1) çözümünün ($x_3 = 1$ alındığında) keyfi sayılar-

la çarpımından elde edilebilir. İleride, (–2, –1, 1) çözümünü ($x_3 = 1$ durumu), ele alınan *sistemin temel çözümü* olarak adlandıracağız.

Şimdi, yukarıdaki örnekten yola çıkarak, hangi durumlarda türdeş (2) sistemin sıfırdan farklı çözümünün varolduğunu ve bu çözümler arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

(a) $m \geq n$ olduğunda, $r(\mathbf{A}) = r \leq n$ olacağı açıktır. Bu durumda, $r(\mathbf{A}) = n$ ise, (2) sisteminin tek çözümü, yani sıfır çözümü vardır. Demek ki, bu durumda sıfırdan farklı çözüm, yalnız $r < n$ olduğunda vardır;

(b) $m < n$ olduğunda, $r(\mathbf{A}) = r \leq m$ olacağı açıktır. Bu durumda da sistemin sıfırdan farklı çözümü vardır (Bölüm 1.5.2'ye bakınız).

Bu incelemeden, doğrusal türdeş denklemler sisteminin sıfırdan farklı çözümünün varlığı için aşağıdaki ölçüt elde edilir.

**TEOREM 3** Doğrusal türdeş denklemler sisteminin sıfırdan farklı çözümünün varlığı için gerek ve yeter koşul, sistemin matrisinin rankının bilinmeyenlerin sayısından küçük olmasıdır.

Sistemin sıfırdan farklı çözümü varsa, her iki seçenek için, **A** matrisinin sıfırdan farklı $r$ basamaklı minörünün matrisin üst sol köşesinde yerleştiğini kabul edebiliriz. O zaman, matrisin ilk $r$ sayıda satırı (demek ki, aynı zamanda sistemin ilk $r$ sayıda denklemi) bağımsız satırlar (denklemler), diğerleri ise bunların doğrusal bağıntısıdır (sonucudur). Bu nedenle, sonuç denklemler gözardı edilir (eğer varsa) ve $n$ bilinmeyenli $r$ sayıda türdeş denklemden oluşan sistem elde edilir. Bu sistemin, $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ bilinmeyenlerini (bağımsız bilinmeyenler) içeren terimlerini sağ tarafa alırsak,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases} \tag{8}$$

sistemini elde ederiz.

(8) sisteminin temel determinantını $\Delta$, yardımcı determinantlarını ise $\Delta_i(x_{r+1}, \ldots, x_n)$ ile gösterelim $(i = \overline{1,r})$. $\Delta \neq 0$ olduğundan, Cramer kuralına göre, sistemin çözümü için,

$$x_1 = \frac{\Delta_1(x_{r+1}, \ldots, x_n)}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2(x_{r+1}, \ldots, x_n)}{\Delta}, \ldots, x_r = \frac{\Delta_r(x_{r+1}, \ldots, x_n)}{\Delta} \tag{9}$$

yazabiliriz. Ancak burada $\Delta_i(x_{r+1}, \ldots, x_n)$ determinantları $(i = \overline{1,r})$ keyfi değerler alabilen $n - r$ sayıda $x_{r+1}, \ldots, x_n$ bağımsız bilinmeyenlerine bağlı olduğundan, (8) sisteminin sonsuz sayıda çözümünün varlığından söz edilebilir.

Bu çözümler sonsuz sayıda olmasına rağmen, bunlardan $n-r$ tanesinin doğrusal bağımsız, diğerlerinin ise bunlara bağımlı olduğu ispatlanabilir. Sözü edilen $n-r$ sayıda bağımsız çözümü elde etmek için, (8) sisteminde $x_{r+1}$, $x_{r+2}, ..., x_n$ bağımsız bilinmeyenlerine sırasıyla $n-r$ sayıda 1, 0, ..., 0; 0, 1, ..., 0; ...; 0, 0, ..., 1 değerleri vermek yeterlidir. Bu süreçte elde edilen $n-r$ sayıda,

$$e_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_r^{(1)}, 1, 0, ..., 0),$$

$$e_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_r^{(2)}, 0, 1, ..., 0), ...,$$

$$e_r(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, ..., x_r^{(r)}, 0, 0, ..., 1)$$

çözümlerine, (2) sisteminin *temel çözümler sistemi* denir. (2) sisteminin temel çözümler sisteminin doğrusal bağıntısına *sistemin genel çözümü* denir ve $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ ile gösterilir. Böylece, (2) sistemin genel çözümü

$$X(x_1, x_2, ..., x_n) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n \tag{10}$$

şeklinde yazılabilir.

---

**ÖRNEK 8**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 9x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

sisteminin temel ve genel çözümünü bulun.

○ Önce, sistemin matrisini yazıp bunun rankını hesaplayalım. Bunun için, matris üzerinde aşağıdaki elemanter dönüşümleri yapalım (elemanter dönüşümler matrisin rankını değiştirmez):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 9 & -5 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 4 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Son matrisin şeklinden görüldüğü gibi, $r(\mathbf{A}) = 2$ 'dir ve sistemin matrisinin 3 ve 4. satırları 1 ve 2. satırlarının doğrusal bağıntısıdır. Bu nedenle, sistemin 3 ve 4. denklemleri atıldığında, sistem

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

şeklini alır. $x_1$ ve $x_2$ 'nin katsayılarının oluşturduğu determinant sıfırdan farklı olduğundan, $x_3$, $x_4$ ve $x_5$ bilinmeyenlerini bağımsız bilinmeyenler olarak adlandırıp onları içeren terimleri sağ tarafa alırsak,

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -2x_3 - 4x_4 + x_5 \\ 2x_1 + 5x_2 = -4x_3 - 3x_4 - 2x_5 \end{cases}$$

elde ederiz. Yukarıda söylenenlere göre, bu sistemin $n - r = 5 - 2 = 3$ sayıda bağımsız çözümü vardır. Bu çözümleri elde etmek için, önce sistemi çözelim.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta_1(x_3, x_4, x_5) = \begin{vmatrix} -2x_3 - 4x_4 + x_5 & 3 \\ -4x_3 - 3x_4 - 2x_5 & 5 \end{vmatrix} = 2x_3 - 11x_4 + 11x_5$$

$$\Delta_2(x_3, x_4, x_5) = \begin{vmatrix} 1 & -2x_3 - 4x_4 + x_5 \\ 2 & -4x_3 - 3x_4 - 2x_5 \end{vmatrix} = 5x_4 - 4x_5$$

olduğundan, Cramer kuralına göre, çözüm olarak,

$$x_1 = -2x_3 + 11x_4 - 11x_5, \quad x_2 = -5x_4 + 4x_5$$

buluruz.

Temel çözümleri elde etmek için, $x_3$, $x_4$, $x_5$ bağımsız bilinmeyenler üçlüsüne, sırasıyla 1, 0, 0; 0, 1, 0 ve 0, 0, 1 değerleri verip, $x_1$ ve $x_2$ için

$$x_1^{(1)} = -2, \; x_2^{(1)} = 0; \quad x_1^{(2)} = 11, \; x_2^{(2)} = -5 \quad \text{ve} \quad x_1^{(3)} = -11, \; x_2^{(3)} = 4$$

değerlerini buluruz. Böylece, ele alınan sistemin temel çözümler sistemi

$$e_1(-2, 0, 1, 0, 0), \quad e_2(11, -5, 0, 1, 0) \quad \text{ve} \quad e_3(-11, 4, 0, 0, 1),$$

şeklinde, genel çözümü ise

$$X(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$$

olarak bulunur. ○

**Uyarı 2** Doğrusal türdeş denklemler sistemi, Gauss eleme yöntemiyle de çözülebilir. Bunu bir örnekle açıklayalım.

---

**ÖRNEK 9**

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

sisteminin temel çözümler sistemini ve genel çözümünü bulun.

○ Sistemin temel matrisi için

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan, ele alınan sistemi, onunla denk olan

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ \quad\quad x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{yani} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 2x_3 \\ \quad\quad x_2 = -x_3 \end{cases}$$

sistemi şeklinde yazabiliriz. Buradan, $x_2 = -x_3, x_1 = x_3$ elde ederiz. $n - r = 3 - 2 = 1$ olduğundan, bir tane temel çözüm vardır ve $(1, -1, 1)$ şeklinde yazılabilir. Genel çözüm ise $(\lambda, -\lambda, \lambda)$ olur. ○

---

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 1.5 için)

**1.** Aşağıdaki sistemleri Cramer kuralıyla çözün.

(a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 = 3 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \sqrt{2}x_1 + 3x_2 = -\sqrt{2} \\ 3x_1 - 2\sqrt{2}x_2 = 10 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 1.5x_1 - 2.5x_2 = 8 \\ 1.3x_1 - 1.2x_2 = 5 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 9 \\ x_1 + 2x_2 = -4 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -6 \\ 3x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 = -10 \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 10 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

(l) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 17x_2 - x_3 - 2x_4 = -1 \\ 4x_1 - 17x_2 + 8x_3 - 5x_4 = 1 \\ 5x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$

**2.** Aşağıdaki sistemlerin uyumlu olup olmadığını belirleyip uyumlu olduğu durumda çözümünü bulun.

(a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 = 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ 1.5x_1 - 0.5x_2 = 0.5 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 0.1x_1 + 1.2x_2 = 6 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 = 2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_1 + 7x_2 - 7x_3 = -5 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 9x_3 = -11 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 1 \\ 6x_1 + 6x_2 - 6x_3 + 9x_4 + 14x_5 = 4 \\ 6x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 12x_4 + 18x_5 = 5 \\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 = 4 \end{cases}$

(l) $\begin{cases} 12x_1 + 7x_2 + 15x_3 + 21x_4 + 21x_5 = 15 \\ 24x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 40x_4 + 41x_5 = 28 \\ 24x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 38x_4 + 40x_5 = 26 \\ 48x_1 + 28x_2 + 60x_3 + 82x_4 + 83x_5 = 58 \end{cases}$

**3.** $\lambda$ parametresine bağlı olarak, aşağıdaki sistemlerin uyumluluğunu inceleyin ve genel çözümünü bulun.

(a) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 6x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 8x_4 = 9 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$

**4.** Gauss eleme yöntemini kullanarak aşağıdaki sistemleri çözün.

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 - 5x_3 = -2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 3 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 6x_4 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 9x_4 = 5 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} -x_1 + 6x_2 - x_3 = 16 \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -23 \\ -x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 29 \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 = 6 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 9x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 8 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 26x_4 = -4 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_1 - 25x_2 - x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + \quad x_3 + 24x_4 = 1 \end{cases}$

5. Aşağıdaki doğrusal türdeş sistemlerin temel çözümler sistemini ve genel çözümünü bulun.

(a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - 12x_3 = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 26x_3 + 22x_4 = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 12x_5 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

## BÖLÜM 1 İÇİN ÇEŞİTLİ ALIŞTIRMALAR

**1.** Verilen

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&3\\1&2&-4\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&1&3\\-2&1&0\\1&3&-2\end{bmatrix}\qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}2&0&0\\3&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&2&0\\2&0&-1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{E}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}0&1&-3\\-1&0&-2\\3&2&0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{H}=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\qquad \mathbf{I}=\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{J}=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}$$

matrisleri için

(a) $\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD}, \mathbf{AE}, \mathbf{A}^T\mathbf{B}^T, \mathbf{C}^T\mathbf{A}, \mathbf{FH}, \mathbf{JF}, \mathbf{GD}, \mathbf{H}^T\mathbf{D}, \mathbf{FH}, \mathbf{FJ}, \mathbf{JC}^T,$ $\mathbf{E}^T\mathbf{G}, \mathbf{CD}, \mathbf{CC}^T$

(b) $\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{B}^{-1}, \mathbf{C}^{-1}, \mathbf{D}^{-1}, (\mathbf{A}^T)^{-1}, (\mathbf{C}^T)^{-1}$;

(c) $\mathbf{ABC}, (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}, \mathbf{AB}+\mathbf{FG}^T$

matrislerini bulun.

**2.** Aşağıdaki işlemler yapıldığında determinantın değeri nasıl değişir?

(a) Determinantın herhangi satırı (sütunu) diğer bütün satırlarla (sütunlarla) toplandığında;

(b) Determinantın herhangi satırı (sütunu) kendisiyle toplandığında;

(c) Determinantın herhangi satırı (sütunu) diğer bütün satırlardan (sütunlardan) çıkarıldığında;

(d) Birinci satır (sütun) sonuncu satırın (sütunun) yerine yazılıp diğerleri olduğu gibi yukarı (sola) kaydırıldığında.

**3.** Aşağıdaki determinantları hesaplayın.

(a) $\begin{vmatrix}3&5&7&2\\1&2&3&4\\-2&-3&3&2\\1&3&5&4\end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{3}&\sqrt{5}&\sqrt{3}\\\sqrt{6}&\sqrt{21}&\sqrt{10}&-2\sqrt{3}\\\sqrt{10}&2\sqrt{15}&5&\sqrt{6}\\2&2\sqrt{6}&\sqrt{10}&\sqrt{15}\end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -c \\ a & 0 & -ç & -d \\ b & ç & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ (g) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

**4.** Aşağıdaki determinantları üçgen şekline dönüştürüp hesaplayın.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$

**5.** Elemanları

(a) $a_{ij} = \min(i, j)$ (b) $a_{ij} = \max(i, j)$ (c) $a_{ij} = \min(i, j) + 1$

olarak belirlenen, $n$ basamaklı determinantları hesaplayın.

**6.** Aşağıdaki matrislerin rankını ve bir tane temel minörünü bulun.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 & 1 & 8 \\ 3 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

**7.** Aşağıdaki sistemlerin uyumlu olup olmadığını inceleyin. Uyumlu olduğu durumda çözümünü bulun.

(a) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 9 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = -2 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - 11x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 2 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 15 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 17 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 14 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$

(l) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 - 11x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 2 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$

**8.** Gauss eleme yönteminin yardımıyla aşağıdaki sistemleri çözün.

(a) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + 14x_3 = -1 \\ 2x_1 - 8x_2 + 4x_3 - 2 \\ 4x_1 - 8x_2 + 8x_3 = -2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 + 9x_3 = -45 \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + 8x_3 = -29 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 + 12x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 17x_2 + 8x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 - 11x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$

**9.** Aşağıdaki doğrusal türdeş sistemlerin sıfırdan farklı çözümlerinin varlığını belirleyin. Böyle çözümlerin varlığı durumunda, temel çözümler sistemini ve genel çözümü bulun.

**(a)** $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

**(c)** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 12x_3 + 8x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 3x_4 = 0 \end{cases}$ **(d)** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

**(e)** $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - 28x_3 + 25x_4 = 0 \end{cases}$

**(f)** $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 + \quad 4x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 3x_4 - 5x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$

# BÖLÜM 2

# Diferansiyel Denklemlerin Temel Kavramları. Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler

## 2.1 DİFERANSİYEL DENKLEM TANIMI. GENEL KAVRAMLAR

**Tanım 1** Aranan fonksiyonun türevini içeren denkleme *diferansiyel denklem*[1] denir. Aranan fonksiyon yalnız bir değişkene bağlı ise, denkleme *adi diferansiyel denklem,* birden fazla değişkene bağlı olduğunda ise *kısmi türevli diferansiyel denklem* denir.

Genelde, adi diferansiyel denklemler için bağımsız değişkeni $x$ veya $t$ (zaman) ile, aranan fonksiyonu $y, z, u$ vb. ile, kısmi türevli diferansiyel denklemlerde ise bağımsız değişkenleri $x, y, z, t$ vb. ile, aranan fonksiyonu da $u, v, w$ vb. ile göstereceğiz.

**Tanım 2** Diferansiyel denklemin içerdiği türevlerin en yüksek mertebesine *diferansiyel denklemin mertebesi* denir. Örneğin,

$$y' + xy + \sin x = 0, \quad (y')^2 - 4x^2 = 0, \qquad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

denklemleri birinci mertebeden,

$$xy'' - y' + y\sin x = 0, \qquad y'' + 3x^2(y')^3 - xy = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

denklemleri ise ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerdir.

Basitlik için ileride adi diferansiyel denklem yerine *diferansiyel denklem,* kısmi türevli diferansiyel denklem yerine ise *kısmi türevli denklem* sözcüklerini kullanacağız.

Şimdilik, adi diferansiyel denklemleri öğreneceğimizden, onlarla ilgili kavramları açıklayalım.

---

[1] Diferansiyel denklem sözcüğünü matematikte ilk kez 1676 yılında Alman matematikçisi Gottfried Leibniz (1646-1716) kullanmıştır.

Yukarıda söylenenleri göz önünde bulundurursak, bağımsız değişken $x$, aranan fonksiyon $y = y(x)$ olarak kabul edildiğinde, $n$. mertebeden diferansiyel denklemi

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu yazılışa, *n. mertebeden diferansiyel denklemin genel şekli* denir. Burada, $F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1})$, $R^{n+2}$ uzayının herhangi $\Omega_{n+2}$ bölgesinde tanımlı ve gereken özelliklere sahip fonksiyondur (bkz. 2, Bölüm 8.9).

(1) denklemi, yüksek mertebeden türeve göre çözülebildiğinde, onu

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \tag{2}$$

şeklinde yazabiliriz. (2) eşitliğine, *n. mertebeden diferansiyel denklemin normal şekli* denir.

Birinci mertebeden $(n = 1)$ diferansiyel denklem için (1) ve (2) yazılışları sırasıyla

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1*}$$

ve

$$y' = f(x, y) \tag{2*}$$

şeklini alır.

Herhangi $(a, b)$ aralığında $n$. mertebeden sürekli türeve sahip olup, $n$. mertebeden diferansiyel denklemi sağlayan her $y(x)$ fonksiyonuna, sözü edilen aralıkta *diferansiyel denklemin çözümü* denir. Örneğin, $y = x^2$ fonksiyonu, dolayısıyla $y = x^2 + C$ şeklindeki bütün fonksiyonlar, $(-\infty, \infty)$ aralığında

$$y' - 2x = 0$$

denkleminin çözümü, $y = \cos kx$ ve $y = \sin kx$ fonksiyonları, dolayısıyla $y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$ şeklindeki bütün fonksiyonlar ise, $(-\infty, \infty)$ aralığında

$$y'' + k^2 y = 0$$

denkleminin çözümüdürler (burada, $C, C_1$ ve $C_2$, keyfi değerler alabilen sabitlerdir).

Açıktır ki, herhangi $(a, b)$ aralığında diferansiyel denklemin çözümü olan $y(x)$ fonksiyonu, $(c, d) \subset (a, b)$ koşulunu sağlayan her $(c, d)$ aralığında da sözü edilen denklemin çözümüdür.

İleride, özel olarak belirtmedikçe, kullanacağımız diferansiyel denklemlerin gerçel fonksiyonlardan oluştuğunu kabul edip yalnız gerçel çözümleri arayacağız.

Diferansiyel denklemin çözümü, içerdiği bilinmeyen fonksiyonun integrallenmesiyle bulunduğundan, çözülme işlemine *diferansiyel denklemin integrallenmesi,* çözüme ise *diferansiyel denklemin integrali* de denir. Diferansiyel denklemin integrallenmesi sürecinde elde edilen integral, hesaplanabilir veya hesaplanamaz olabilir (bkz. 1, Bölüm 5.2). Her iki durumda denklem, *çözülebilir* veya *kareleştirilebilir diferansiyel denklem* olarak adlandırılır. Örneğin,

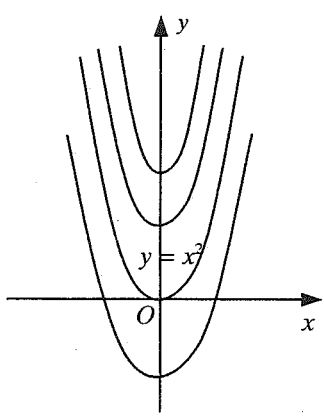
$$y' = \frac{\sin x}{x} \quad \text{ve} \quad y' = e^x$$

denklemlerinin bütün çözümleri, sırasıyla

$$y = \int \frac{\sin x}{x}\, dx + C \ \text{ve}\ y = e^x + C$$

şeklinde gösterilebildiğinden, $\int \frac{\sin x}{x}\, dx$ integrali hesaplanamaz olmasına rağmen, her iki denklem, çözülebilir (kareleştirilebilir) diferansiyel denklemlerdir.

Diferansiyel denklemin çözümünün grafiğine, sözü edilen *diferansiyel denklemin integral eğrisi* denir. Örneğin, yukarıda adı geçen $y = x^2 + C$ şeklindeki bütün fonksiyonlar $y' - 2x = 0$ denkleminin integralleri, $C$ 'nin farklı değerlerinde bunların grafiği olan paraboller ise onun integral eğrileridir (Şekil 1).




**ŞEKİL 1**

Yukarıdaki denklemlerden görüldüğü gibi, genelde diferansiyel denklemin integrali (çözümü), denklemin mertebesi kadar keyfi sabite bağlıdır (çözüm yapılırken, ardarda denklemin mertebesi kadar belirsiz integral alındığı için). Bu çözümler içerisinden *özel çözüm* diye adlandırılan istenen çözümü bulmak için, çoğu durumda, $n$. mertebeden denklem için başlangıç koşulları denen,

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{3}$$

şeklinde ek koşullar verilir ( $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in \Omega_{n+1} \subset R^{n+1}$ ).

(1) veya (2) denkleminin, (3) başlangıç koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemine, sözü edilen denklem için *başlangıç değer problemi* veya *Cauchy problemi* denir.

**Tanım 1** $n$ sayıda keyfi sabite bağlı $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ fonksiyonu, (1) (veya (2)) denklemini sağlıyorsa ve bu sabitler (3) başlangıç koşullarının her birine göre tek değerli olarak bulunabiliyorsa, o zaman, sözü edilen fonksiyona (1) (veya (2)) denkleminin *genel çözümü* denir. Sabitlerin çeşitli değerlerinde, genel çözümden elde edilen çözümlere *özel çözümler* denir.

Örneğin, keyfi iki sabite bağlı $y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$ fonksiyonu, $y'' + k^2 y = 0$ denklemini sağlar ve her $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$ başlangıç koşulu için $C_1$ ve $C_2$ sabitleri

$$\begin{cases} C_1 \cos kx_0 + C_2 \sin kx_0 = y_0 \\ -kC_1 \sin kx_0 + kC_2 \cos kx_0 = y_0' \end{cases}$$

doğrusal denklem sisteminden tek değerli olarak bulunabildiğinden (Bölüm 1.5'e bakınız), bu fonksiyon sözü edilen denklemin genel çözümüdür. Genel çözümden elde edilen $y = \cos kx$ $(C_1 = 1, C_2 = 0)$, $y = \sin kx$ $(C_1 = 0, C_2 = 1)$, $y = \cos kx - \sin kx$ $(C_1 = 1, C_2 = -1)$, vb. fonksiyonları ise özel çözümlerdir.

Benzer şekilde, $y = x^2 + C$ fonksiyonunun $y' - 2x = 0$ denkleminin genel çözümü olduğu denetlenebilir. Bu çözümden elde edilen $y = x^2$ $(C = 0)$, $y = x^2 - 1$ $(C = -1)$, $y = x^2 + 3$ $(C = 3)$ vb. fonksiyonları ise sözü edilen denklemin özel çözümleridir.

Tanımdan görüldüğü gibi, 1. mertebeden diferansiyel denklemin genel çözümü bir tane keyfi sabite bağlıdır. Bu nedenle de, bu çözüm $y = \varphi(x, C)$ şeklinde yazılabilir.

Birinci mertebeden diferansiyel denklemin genel çözümü, $y$ 'ye göre çözülmemişse yani,

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad \text{veya} \quad \varphi(x, y) = C,$$

şeklinde ise, o zaman bu çözüme, sözü edilen denklemin *genel integrali* denir.

Görüldüğü gibi, 1. mertebeden diferansiyel denklemin gerek genel çözümü ($y = \varphi(x, C)$), gerekse de genel integrali ($\Phi(x, y, C) = 0$ veya $\varphi(x, y) = C$), bir $C$ parametresine bağlı eğri ailesidir. Bu nedenle, bir parametreye bağlı eğri ailesi verildiğinde, eşitliğin her iki tarafının $x$'e göre türevi alınıp, elde edilen denklem ve eğri ailesinin denkleminden $C$'yi yok ettikten sonra, $y(x)$'e göre birinci mertebeden diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklem, verilen *eğri ailesinin diferansiyel denklemi* diye adlandırılır.

---

**ÖRNEK 1** Denklemleri aşağıda verilen eğri ailelerinin diferansiyel denklemini bulun.

**(a)** $y = x + C$ **(b)** $y = -\dfrac{1}{x + C}$

**(c)** $x^2 + y^2 = C$ **(d)** $y(\ln|x^2 - 1| + C) = 1$

○ **(a)** Denklemin her iki tarafının türevini alırsak, $y' = 1$ olur. Bu, verilen eğri ailesinin diferansiyel denklemidir;
**(b)** Denklemin her iki tarafının türevini alıp,

$$y' = \frac{1}{(x + C)^2}$$

buluruz. Verilen ailenin denkleminden $\dfrac{1}{x + C} = -y$ yazıp bunu son eşitlikte göz önüne alırsak, eğri ailesinin diferansiyel denklemini

$$y' = y^2$$

olarak buluruz;
**(c)** Benzer yöntemle, verilen eğri ailesinin diferansiyel denklemi

$$2x + 2yy' = 0, \text{ yani, } x + yy' = 0$$

olarak bulunur;
**(d)** Yine benzer yöntemi uygulayalım:

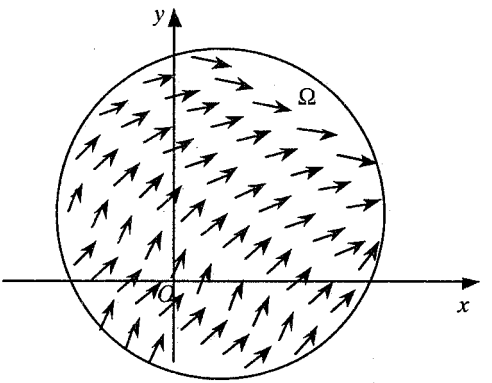
$$y'(\ln|x^2 - 1| + C) + \frac{2xy}{x^2 - 1} = 0$$

Burada, verilen denklemde $\ln|x^2 - 1| + C = \dfrac{1}{y}$ olduğunu göz önüne alırsak, eğri ailesinin aranan diferansiyel denklemini

$$\frac{y'}{y} + \frac{2xy}{x^2 - 1} = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{y'}{y^2} + \frac{2x}{x^2 - 1} = 0$$

olarak buluruz. ○

---




**ŞEKİL 2**

Şimdi, birinci mertebeden

$$y' = f(x, y) \qquad (2^*)$$

denklemini ele alalım. $f(x, y)$ fonksiyonunun tanım bölgesi, $xOy$ düzleminde herhangi $\Omega_2$ bölgesi olsun. (2*) denklemi, her $M(x, y) \in \Omega_2$ noktasının koordinatları ile, integral eğrisinin bu noktadaki teğetinin eğimi arasında bağlantı oluşturmaktadır. Başka bir deyişle, $\Omega_2$ bölgesinin her $M(x, y)$ noktasına, eğimi $f(x, y)$ olan bir doğrultu karşılık gelir (Şekil 2). Bu doğrultular topluluğuna, (2*) denkleminin belirlediği *doğrultular alanı* denir.

Kimi durumlarda, doğrultular alanını belirlemek için, *eşeğimliler (isocline)* denen ve aranan integral eğrilerinin teğetlerinin eğimlerinin sabit olduğu noktaların geometrik yeri olarak tanımlanan çizgileri kullanmak elverişlidir. Örneğin, (2*) denkleminin eşeğimlileri, $f(x, y) = C$ şeklinde eğri ailesidir (Örnek 2'ye bakınız).

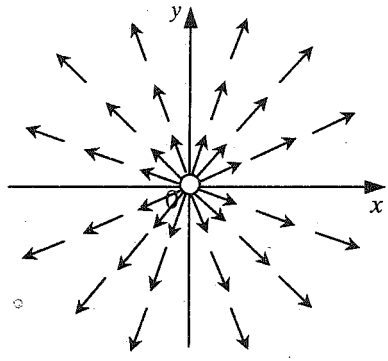
Söylenenlerden görüleceği gibi, (2*) denkleminin $y(x_0) = y_0$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümünün bulunması, $\Omega_2$ bölgesinin $M_0(x_0, y_0)$ noktasından geçen ve her $(x, y) \in \Omega_2$ noktasında teğetinin eğimi $f(x, y)$ olan bir $y = y(x)$ eğrisinin çizilmesine denktir.

---

**ÖRNEK 2** Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin şekline dayanarak, doğrultular alanını çizip integral eğrilerini ve eşeğimlilerini belirleyin.

(a) $y' = \dfrac{y}{x}$ (b) $y' = -\dfrac{x}{y}$ (c) $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$

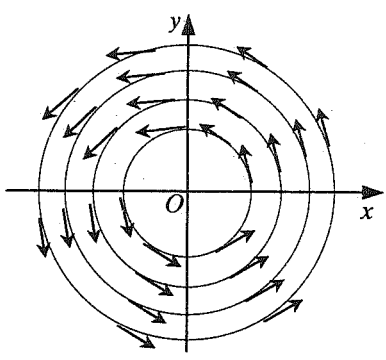
○ (a) $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$ olduğundan, $\Omega_2$ olarak, $y$ ekseninin noktaları $(x = 0)$ hariç olmak üzere, bütün $xOy$ düzlemi kabul edilebilir. Aranan integral eğrile-



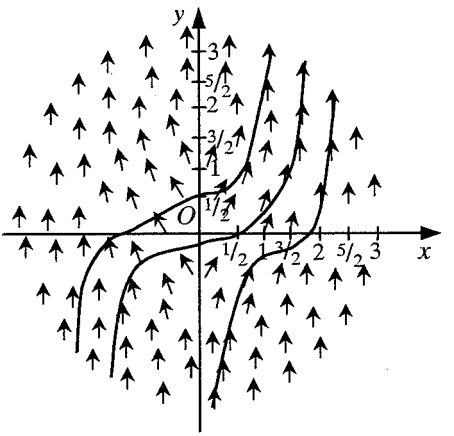

**ŞEKİL 3**

rinin her $(x, y)$ noktasında eğimi $k = \frac{y}{x}$ olduğundan, eşeğimliler $y = kx$ doğruları (yani, (0, 0) noktası hariç olmak üzere, koordinat başlangıcından çıkan ışınlar) olarak bulunur. Bu ışınların doğrultuları, doğrultular alanını oluşturur (Şekil 3). $y = kx$ doğruları $(x \neq 0)$, aynı zamanda eşeğimlidirler $(k = C)$;

**(b)** Doğrultular alanını belirlemek için, denklemin eşeğimlilerini kullanalım. $f(x, y) = -\frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$ olduğunu göz önüne alırsak, tanıma göre eşeğimlilerin $-\frac{x}{y} = k$, yani $y = -\frac{1}{k}x$ ışınları ((0, 0) noktası hariç) olacağı açıktır. Aranan integral eğrilerinin her noktada eğimi $k = -\frac{x}{y}$ olup ((0, 0) noktası hariç), $y = k_1 x$ doğrusunun eğimiyle $kk_1 = -1$ koşulunu (iki doğrunun veya kesişme noktasında iki eğrinin diklik koşulu) sağladığından, verilen denklemin doğrultular alanının Şekil 3'te çizilen doğrultular alanına (ışınlara) dik olacağı açıktır. Demek ki, ele alınan denklemin integral eğrileri, $x^2 + y^2 = C^2$ şeklinde çemberlerdir (Şekil 4);




**ŞEKİL 4**




**ŞEKİL 5**

(c) Ele alınan denklem için,

$$x^2 + y^2 = C^2$$

çemberlerinin eşeğimliler olacağı açıktır. Şekil 5'te $C = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$ değerlerinde, somut eşeğimliler (çemberler) ve onlara uygun doğrultular alanı çizilmiştir. O

---

$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})$ fonksiyonu, $y, y', y'', ..., y^{(n)}$'lerin her birine göre doğrusal olduğunda, (1) denklemi

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \qquad (4)$$

şeklinde yazılabilir. (4) şeklindeki denkleme, *n. mertebeden doğrusal diferansiyel denklem* denir. Burada, belli bir aralıkta tanımlı $p_i(x)$ fonksiyonları $(i = \overline{1,n})$ *diferansiyel denklemin katsayıları* olarak, $f(x)$ fonksiyonu ise *bağımsız terim (sağ taraf)* diye adlandırılır. $f(x) \equiv 0$ durumunda, denklem

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad (4^*)$$

şeklini alır ve *türdeş diferansiyel denklem* diye adlandırılır. Bu durumda, (4) denklemi, *türdeş olmayan doğrusal diferansiyel denklem* adını taşır.

Açıktır ki,

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$
$$(a_0(x) \neq 0)$$

şeklindeki denklem de doğrusal denklemdir ve her iki tarafı $a_0(x)$ 'e bölerek (4) şekline getirilebilir.

(4) denkleminde tüm $p_i(x)$ katsayıları $(i = \overline{1,n})$ sabit olduğunda, buna *sabit katsayılı n. mertebeden doğrusal diferansiyel denklem* denir. Örneğin,

$$y''' + 5y'' - 3y' + 3y = x^2 \sin x$$

sabit katsayılı üçüncü mertebeden diferansiyel denklemdir.

(4) şeklinde yazılamayan diferansiyel denkleme *doğrusal olmayan diferansiyel denklem* denir.

Ayrıca,

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

şeklindeki denkleme, *hemen hemen doğrusal (quasilinear) diferansiyel denklem* denir.

Görüldüğü gibi, hemen hemen doğrusal diferansiyel denklemler kümesi, doğrusal olmayan diferansiyel denklemler kümesinin alt kümesidir. Doğrusal, hemen hemen doğrusal ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemlere ait örnekler aşağıda verilmektedir.

$$y' + x^2 y = 1 \qquad \textit{(doğrusal)}$$

$$(x^2 + 1)y'' + 3xy' + y = 0 \qquad \textit{(doğrusal türdeş)}$$

$$y'' + 2xyy' + y \sin x = 0 \qquad \textit{(doğrusal olmayan)}$$

$$y''' + 5x^2 y'' - 4xy' + e^x y = xy^2 + 3y'y'' \qquad \textit{(hemen hemen doğrusal)}$$

$$y'' + \frac{3x}{y'} - 2x^2 y = 0 \qquad \textit{(doğrusal olmayan)}$$

$$y^2 y''' + 5xy'y'' = 2x^2 \qquad \textit{(doğrusal olmayan)}$$

Bilindiği gibi, $F_1(x, y, z)$ ve $F_2(x, y, z)$ fonksiyonları herhangi $\Omega$ bölgesinde tanımlı olduğunda,

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad \text{ve} \quad F_2(x, y, z) = 0 \tag{5}$$

cebirsel denklemlerinden birini sağlayan tüm $(x, y, z) \in \Omega$ noktaları ötekini de sağlıyorsa, o zaman sözü edilen denklemlere $\Omega$ bölgesinde *özdeş cebirsel denklemler* denir.

(5) cebirsel denklemleri $\Omega$ bölgesinde özdeş olduğunda,

$$F_1(x, y, y') = 0 \quad \text{ve} \quad F_2(x, y, y') = 0 \tag{6}$$

denklemlerine, sözü edilen bölgede *özdeş diferansiyel denklemler* denir. Böylece, $y(x)$ fonksiyonu (6) diferansiyel denklemlerinden herhangi birinin çözümüyse ötekinin de çözümüdür $\big(x \in (a, b), (x, y(x), y'(x)) \in \Omega\big)$. Örneğin,

$$y' = 2xy \quad \text{ve} \quad (y')^3 - 8x^3y^3 = 0$$

denklemleri $R^3$'te özdeştirler $(\Omega = R^3)$ ve çözümleri de $y = Ce^{x^2}$ şeklindedir (burada $C$, keyfi sabittir).

Diferansiyel denklemler üzerinde sadeleştirmeler veya dönüşümler yaparken, elde edilen yeni denklemin ele alınan denklemle özdeş olmasına özen göstermek gerekir. Aksi durumda, denklemin bazı çözümleri yok olabilir veya denklemi sağlamayan "çözümler" ortaya çıkabilir. Örneğin,

$$\sqrt{y'} = x$$

denklemini dönüştürüp

$$y' = x^2$$

şeklinde yazdığımızda, elde edilen denklem ele alınan denklemle özdeş değildir, çünkü ele alınan denklemde $x$ yalnız negatif olmayan değerleri, sonuç denkleminde ise $(-\infty, \infty)$ aralığındaki tüm değerleri alabilir.

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 2.1 için)

**1.** Aşağıdaki denklemlerin mertebesini belirleyin.

**(a)** $y' + 5xy - 2y^2 = 0$ **(b)** $(y')^3 + 4xy - 3y^3 = 0$

**(c)** $\sqrt[3]{y''} + xy' = 0$ **(d)** $y'y'' + 5xy' - 3x^3 = 0$

**(e)** $x^3y''' - 5x^2y'' + 6xy' = 2x^2$ **(f)** $(y^{(4)})^3 + (y''')^3 = 0$

**(g)** $u_{tt} - a^2u_{xx} = 0$ **(h)** $u_t - a^2u_{xx} = f(t, x)$

**(i)** $u_{tt} - a^2u_{txx} = f(t, x)$

**2.** Aşağıdaki fonksiyonların verilen diferansiyel denklemlerin çözümü olup olmadığını belirleyin.

**(a)** $y = 3e^{-5x}$, $y' + 5y = 0$

**(b)** $y = e^{3x}$, $y'' + 3y' = 18e^{3x}$

**(c)** $y = (C_1 + C_2x)e^{3x}$, $y'' - 6y' + 9y = 0$

(d) $y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x,\ y''' + 4y' = 0$

(e) $y = x^2(\cos \ln x + \sin \ln x),\ x^2 y'' - 3xy' + 5y = 0$

(f) $y = \sin 3x,\ y'' - 3y = 0$

(g) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,\ y'' + 4y' = x$

3. Aşağıda verilen eğri ailelerinin diferansiyel denklemlerini bulun.

(a) $y^2 = 2p(x + C)$ (b) $y = Ce^{-x}$ (c) $y(1 + Cx) = 3$

(d) $y = x\left(\int_0^x \frac{1}{t} e^t dt + C\right)$ (e) $3x + y - 2 = Ce^{x+3y}$ C çözülmeyece

4. Aşağıdaki denklemlerin şekline dayanarak, doğrultular alanını çizip eş-eğimlilerini belirleyin.

(a) $y' = x + 1$ (b) $y' = x + y$

(c) $y' = y + 1$ (d) $y' = 1 + y^2$

5. Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin özdeş olup olmadığını belirleyin.

(a) $y'^2 = x + 3$ ve $y' = \sqrt{x + 3}$

(b) $\ln(y' + 1) = x - 1$ ve $y' + 1 = e^{x-1}$

(c) $y^2 y' = 2xy$ ve $yy' = 2x$

6. Aşağıdaki fonksiyonların verilen denklemlerin genel çözümü (integrali) olduğunu gösterin.

(a) $y = x(C - \ln|x|),\ y' = \dfrac{y - x}{x}$

(b) $y = \arccos e^{Cx},\ y' = -\dfrac{\ln \cos y}{x \tan y}$

(c) $x^2 + y^2 = \ln Cx^2,\ y' = \dfrac{1 - x^2}{xy}$

(d) $y = C \sin x,\ y' \tan x = y$

## 2.2 DİFERANSİYEL DENKLEM KAVRAMINI GEREKTİREN PROBLEMLER

Bütün bilim alanları gibi, diferansiyel denklemler de genelde insanların yaşamsal sorunlarının çözümüyle ilgili olarak ortaya çıkmıştır. Bunu birkaç örnekle açıklayalım.

---

**ÖRNEK 1 (Soğuma Yasası)** Sıcaklığı $t = 0$ anında $u_0$ olan cisim, sıcaklığı $\tau$ olan $(\tau < u_0)$ ortama yerleştirilmiş olsun. Zamana bağlı olarak, cismin soğuma, yani sıcaklığının azalma yasasını belirleyin.

○ Verilen cismin $t$ anındaki sıcaklığı $u(t)$ olsun $(u(0) = u_0)$. Cismin soğuma hızının $(u'(t))$ onun ve ortamın sıcaklıkları farkıyla orantılı olduğunu ve $u(t)$ 'nin azalan fonksiyon olduğunu göz önüne alırsak,

$$u'(t) = -k[u(t) - \tau] \tag{1}$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada, $k\,(k > 0)$ orantı katsayısıdır.

Böylece, cismin soğuma yasasını, yani soğumanın matematik modelini elde ederiz. Bu denklem, 1. mertebeden doğrusal denklemdir.

Elde edilen denklemi çözmek için, her iki tarafı $e^{kt}$ ile çarpıp

$$e^{kt}u'(t) + ke^{kt}u(t) = k\tau e^{kt}$$

$$(e^{kt}u(t))' = k\tau e^{kt}$$

yazalım. Son eşitlikten

$$e^{kt}u(t) = \tau e^{kt} + C$$

buluruz, sonuçta ise,

$$u(t) = Ce^{-kt} + \tau \tag{2}$$

elde ederiz. Burada $C$, integralleme sabitidir ve cismin başlangıç anındaki $(t = 0)$ sıcaklığına $(u(0) = u_0)$ dayanarak bulunabilir. Gerçekten, (2) eşitliğinde $t = 0$ yazdığımızda,

$$u_0 = Ce^{-k\cdot 0} + \tau \quad \text{yani} \quad C = u_0 - \tau$$

buluruz. $C$ 'nin değerini (2) eşitliğinde yazdığımızda,

$$u(t) = (u_0 - \tau)e^{-kt} + \tau \tag{3}$$

buluruz.

Böylece, her $t$ zaman anında sözü edilen cismin sıcaklığı, yani soğuma yasası (3) eşitliğiyle belirlenir. ○

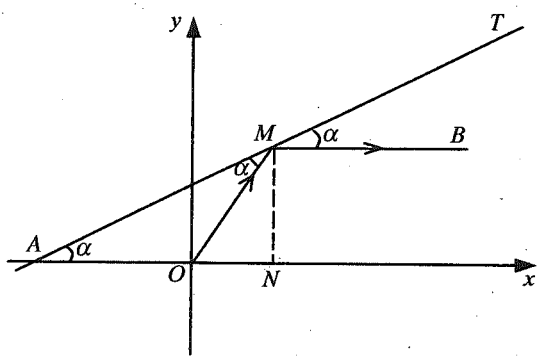
---

**Uyarı 1** Ele alınan örnek, $u_0 < \tau$ durumunda, cismin ısınma yasasını belirler.

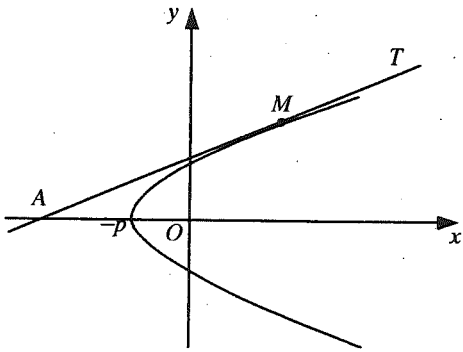
---

**ÖRNEK 2 (Araba farının biçimi)** Şöyle bir sorunun yanıtını arayalım. Araba farının aynası ne biçimde olmalıdır ki, ışık kaynağından gelen ışınlar aynanın yüzeyinden yola paralel olarak yansısın?

○ Apsis ekseninin yol doğrultusunda, farın ışık kaynağının ise koordinat başlangıcında yerleştiğini varsayıp, ayna yüzeyinin $xOy$ düzlemiyle kesitinin $y = y(x)$ eğrisi (fonksiyonu) olduğunu kabul edelim (Şekil 6*a*). Sözü edilen eğrinin denklemini bulmak için, eğri üzerinde keyfi $M(x, y)$ noktasını alıp, bu noktada eğriye çizilen $MT$ teğetinin apsis eksenini $A$ noktasında kestiğini düşünelim. Gelme açısı yansıma açısına eşit olduğundan, ışık kaynağından $M$ noktasına gelen $[OM$ ve yansıyan $[MB$ ışınlarının $MT$ teğetiyle oluşturduğu açılar için,




**ŞEKİL 6*a***




**ŞEKİL 6*b***

$$\angle OMA = \angle BMT = \alpha$$

yazabiliriz. $MB$ ve $AN$ paralel olduğundan,

$$\angle MAN = \alpha$$

eşitliği de doğrudur. Böylece, $AOM$ üçgeninin ikizkenar olduğu sonucuna varırız:

$$|AO| = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$ANM$ dik üçgeninden,

$$\tan\alpha = \frac{|NM|}{|AN|}$$

yazabiliriz. Burada,

$$|NM| = y,\ |AN| = |AO| + |ON| = \sqrt{x^2 + y^2} + x \quad (|ON| = x)$$

olduğunu ve türevin geometrik anlamını ($\tan\alpha = y'$) göz önüne alırsak,

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \tag{4}$$

eşitliğini elde ederiz.

Görüldüğü gibi, (4) denklemi doğrusal olmayan, birinci mertebeden diferansiyel denklemdir ve analitik ifadesi aranan eğri, bunun integral eğrisidir.

Şimdi, (4) denklemini aşağıdaki yapay yöntemle çözelim. Önce, denklemin sağ tarafının pay ve paydasını, paydanın eşleniğiyle yani $\sqrt{x^2 + y^2} - x$ ile çarpıp, denklemi

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y} \quad \text{veya} \quad \frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$$

şeklinde, daha sonra da,

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)' = 1$$

şeklinde yazalım. Buradan,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + C \quad \text{veya} \quad y^2 = 2Cx + C^2$$

elde ederiz ($C$, keyfi sabittir). Görüldüğü gibi, elde edilen denklem, simetri ekseni apsis ekseni olan parabolü göstermektedir. $C$ sabitini belirlemek için,

ışık kaynağının parabolün tepesinden $p$ uzaklıkta olduğunu ($|OS| = p$) kabul edelim. Böylece, $y = 0$ olduğunda $x = -p$ olur ve denklemden,

$$0 = 2C(-p) + C^2$$

elde ederiz. Buradan, $C$ sabiti için

$$C_1 = 0 \quad \text{ve} \quad C_2 = 2p$$

şeklinde, iki değer buluruz. $C_1 = 0$ sorunun fizik anlamına uymadığından, $C$'nin değeri $2p$ olarak kabul edilir. Böylece, aranan eğri (fonksiyon),

$$y^2 = 4p(x + p) \tag{5}$$

şeklinde paraboldür ve ışık kaynağı bunun odak noktasındadır (Şekil 6*b*).

Elde edilen parabolü $x$ ekseni etrafında döndürürsek (bkz. 2, Bölüm 9.9),

$$y^2 + z^2 = 4p(x + p)$$

dönel paraboloidini elde ederiz. Demek ki, araba farının aynasının dönel paraboloit biçiminde olması gerekir. ○

---

**Uyarı 2** Örnek 2'nin sonucuna bakıldığında, gerek ışık gerekse mikrodalga yansıtıcılarının ve alıcı çanak antenlerin neden dönel paraboloit şeklinde yapıldığı anlaşılır.

---

**ÖRNEK 3** $y = cx^2$ parabol ailesini dik açı altında kesen eğri ailesinin denklemini bulun (burada, $c$, keyfi değerler alan parametredir).

○ Önce, $y = cx^2$ parabol ailesinin, keyfi $M(x, y)$ noktasındaki eğimini, yani sözü edilen noktada parabole çizilen teğetin $k(x)$ eğimini bulalım. Bunun için, denklemin her iki tarafının $x$'e göre $y' = 2cx$ türevini alıp, $c = \dfrac{y}{x^2}$ olduğunu ve türevin geometrik anlamını göz önünde bulundurursak,

$$k(x) = y' = 2cx = 2 \cdot \frac{y}{x^2} \cdot x \quad \text{yani} \quad k(x) = \frac{2y}{x}$$

elde ederiz.

Aranan eğri ailesinin ele alınan $M(x, y)$ noktasındaki eğimini $k_1(x)$ ile gösterelim. Verilen ve aranan eğri ailelerinin eğrileri kesişme noktasında birbirine dik olduğundan (bilindiği gibi, *iki eğri arasındaki açı* bunların kesişme

noktasındaki teğetleri arasındaki açı olarak tanımlanır), iki doğrunun diklik koşuluna göre,

$$k(x) \cdot k_1(x) = -1 \Rightarrow k_1(x) = -\frac{1}{k(x)} \Rightarrow k_1(x) = -\frac{x}{2y}$$

yazabiliriz. Burada yine türevin geometrik anlamını göz önüne alırsak $(y' = k_1(x))$, aranan eğri ailesinin diferansiyel denklemini elde ederiz:

$$y' = -\frac{x}{2y} \tag{6}$$

Görüldüğü gibi, (6) denklemi, doğrusal olmayan 1. mertebeden diferansiyel denklemdir. Çözümünü bulmak için bunu

$$2ydy = -xdx$$

şeklinde yazıp her iki tarafın $x$'e göre integralini alırsak (integralleme yapılırken $dy = y'dx$ olduğu düşünülür),

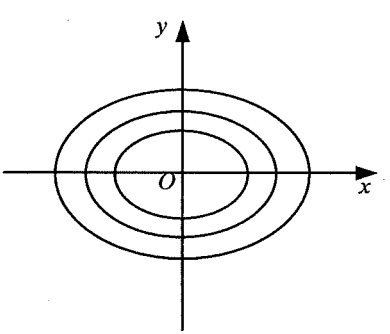
$$y^2 = -\frac{x^2}{2} + C \quad \text{veya} \quad \frac{x^2}{2} + y^2 = C \ (C > 0) \tag{7}$$

olur.

Böylece, aranan eğri ailesi, (7) denklemiyle belirlenen elips ailesidir (Şekil 7). ○

---

Yukarıda ele alınan üç örneğin farklı konulara ait olmasına rağmen, üç durumda da sonuç, aranan fonksiyonun türevini içeren denklemin, yani diferansiyel denklemin çözümünü gerektirir. Böylece, diferansiyel denklemlerin incelenmesinin gerekliliği ortaya çıkıyor.




**ŞEKİL 7**

## 2.3 BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜYLE İLGİLİ BAZI TEOREMLER

Diferansiyel denklemler için ele alınan herhangi problemin incelenmesinde, başlıca temel sorular şunlardır: "Ele alınan problemin çözümü var mı, varsa kaç tane; varolan çözüm (veya çözümler) nasıl bulunur; çözümün diferansiyel özellikleri nedir; çözümün giriş verilerine (yani başlangıç koşulları ve sağ tarafa) bağımlılığı sürekli mi, başka bir deyişle, giriş verilerinin küçük değişmesi çözümü nasıl etkiler (büyük çoğunlukla diferansiyel denklemlerin uygulamalarında giriş verileri deney yoluyla belirlendiğinden, her zaman çeşitli hatalar ortaya çıkar ve bu hataların çözümü nasıl etkilediği merak konusudur) vb."

Bu soruları yanıtlayan aşağıdaki teoremleri,

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

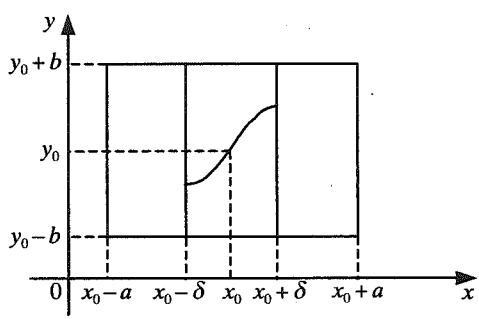
$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

başlangıç değer problemi için ispatsız verelim. Burada $f(x, y)$, herhangi $D \subset R^2$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon, $(x_0, y_0)$ ise bu bölgenin belli bir noktasıdır.

**TEOREM 1** **(varlık)** $f(x, y)$ fonksiyonu herhangi $D$ bölgesinde sürekli ve sınırlı ise, sözü edilen bölgenin her $(x_0, y_0)$ noktasından (1) denkleminin en azından bir tane integral eğrisi geçer.

Yukarıdaki teorem, koşullar sağlandığında (1)-(2) probleminin çözümünün varlığını iddia ediyor. Ancak, bu çözüm tek midir sorusunu yanıtlamıyor. Buna açıklık getirmek için,

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y}, \qquad y(1) = 0$$




**ŞEKİL 8**

başlangıç değer problemini ele alalım. Burada, $f(x, y) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y}$ olup, (1, 0) noktasını içeren her sınırlı $D$ bölgesinde sürekli ve sınırlıdır. Yani, Teorem 1'in koşullarını sağlar. $y = 0$ 'ın ele alınan problemin çözümü olduğu açıktır. Öte yandan, $y = \pm\sqrt{(x-1)^3}$ fonksiyonlarının da ele alınan problemin çözümleri olduğu kolaylıkla denenebilir. Yani, problemin en azından üç tane çözümü vardır. Demek ki, Teorem 1'in koşulları çözümün tekliği için yeterli değildir.

**TEOREM 2** **(varlık ve teklik).** $f(x, y)$ ve $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ fonksiyonları $D\{|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ dikdörtgen bölgesinde sürekli ise, (1)-(2) probleminin tek bir çözümünün varolacağı bir $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ aralığı vardır. Burada $\delta < \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\right)$ ve $M = \max\limits_{(x,y)\in D}|f(x, y)|$, $N = \max\limits_{(x,y)\in D}\left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|$'dir (Şekil 8).

Bu teoremlerin koşullarını karşılaştırıp yukarıdaki örneğe göz attığımızda, çözümün tek olmamasının nedeni, (1, 0) noktasında $f(x, y) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y}$ fonksiyonunun $\frac{\partial f}{\partial y}$ kısmi türevinin olmayışıdır diyebiliriz.

**ÖRNEK 1** Aşağıdaki denklemlerin çözümlerinin varlık ve teklik bölgelerini bulun.

**(a)** $y' = ax^2 + by^2 \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$ **(b)** $y' = \frac{x}{x + y}$

○ **(a)** $f(x, y) = ax^2 + by^2$ fonksiyonu ve bunun $\frac{\partial f}{\partial y}$ türevi $xOy$ düzleminin tüm noktalarında sürekli olduğundan, Teorem 2'ye göre, sözü edilen düzlemin her $(x_0, y_0)$ noktasından verilen denklemin tek bir çözümü (integral eğrisi) geçer;

**(b)** $f(x, y) = \frac{x}{x + y}$ fonksiyonu, $xOy$ düzleminin $x + y = 0$ doğrusu dışındaki tüm noktalarında, yani $x + y > 0$ ve $x + y < 0$ yarı düzlemlerinde sürekli olup $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{(x + y)^2}$ sürekli kısmi türevine sahiptir. Bu nedenle, sözü edilen yarı düzlemlerin her $(x_0, y_0)$ noktasından verilen denklemin tek bir çözümü (integral eğrisi) geçer. ○

**ÖRNEK 2** $y' = y^2$, $y(1) = 2$ problemi için, $D\{|x-1| \le a, |y-2| \le b\}$ dikdörtgen bölgesinde Teorem 2'deki $\delta$ sayısının sınırını belirleyin.

○ Verilen denklem Örnek 1'in (a) seçeneğinde ele alınan denklemin özel bir durumu olduğundan, $xOy$ düzleminin her $(x_0, y_0)$, aynı zamanda (1, 2) noktasından denklemin tek bir çözümünün geçeceği açıktır.

Şimdi, $f(x, y) = y^2$ olduğunu göz önüne alıp önce $D$ bölgesinde $M$ ve $N$ sayılarını belirleyelim:

$$M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)| = \max_{y\in[2-b,2+b]} y^2 = (2+b)^2$$

$$N = \max_{(x,y)\in D} \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| = 2 \max_{y\in[2-b,2+b]} |y| = 2(2+b)$$

Bu değerleri, $\delta < \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\right)$ eşitsizliğinde göz önüne alırsak, $\delta < \min\left(a, \frac{b}{(2+b)^2}, \frac{1}{2(2+b)}\right)$ olur. Özel olarak, $a = 2$, $b = 1$ kabul edersek, $\delta < \frac{1}{9}$ şeklinde belirlenir. ○

Diferansiyel denklemlerin varolan çözüm veya çözümlerinin bulunma yöntemleri ileriki bölümlerde açıklanacağından, diğer soruları yanıtlayan teoremleri verelim.

**TEOREM 3** **(çözümün diferansiyellenebilirliği)** $f(x, y)$ fonksiyonu $(x_0, y_0)$ noktasında ve herhangi civarında $k$. mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahipse, sözü edilen civarda (1)-(2) probleminin çözümünün $(k+1)$. mertebeye kadar sürekli türevleri vardır.

Şimdi, (1)-(2) probleminin yanısıra

$$\tilde{y}' = \tilde{f}(x, \tilde{y}) \qquad (1^*)$$

$$\tilde{y}(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0 \qquad (2^*)$$

problemini ele alalım. Burada, $\tilde{f}(x, \tilde{y})$, herhangi $D \subset R^2$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon, $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ ise bu bölgenin belli bir noktasıdır.

**TEOREM 4** **(giriş verilerine sürekli bağımlılık).** $f(x, y)$ fonksiyonu herhangi $D$ bölgesinde sürekli ve sınırlı ise ve bu bölgenin her $(x_0, y_0)$ noktasından (1)-(2) probleminin tek bir çözümü (integral eğrisi) geçiyorsa, bu çözüm $f(x, y)$ ve $(x_0, y_0)$'a sürekli bağımlıdır. Başka bir deyişle, $D$ bölgesinin bütün

$(x_0, y_0)$ ve $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ noktalarından sırasıyla (1)-(2) ve (1*)-(2*) problemlerinin $[\alpha, \beta]$ aralığında tanımlı tek bir çözümü (integral eğrisi) geçiyorsa, her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır ki,

$$|x_0 - \tilde{x}_0| < \delta, \quad |y_0 - \tilde{y}_0| < \delta, \quad |f(x,y) - \tilde{f}(x,\tilde{y})| < \delta \quad (D\text{'de})$$

eşitlikleri sağlandığında, sözü edilen problemlerin çözümleri için,

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır ($x \in [\alpha, \beta]$).

Bu teorem, sözü edilen koşullar sağlandığında, giriş verilerinin küçük değişimine çözümün küçük değişimi karşılık gelir şeklinde de açıklanabilir.

Şimdi, türeve göre çözülmemiş birinci mertebeden denklem için,

$$F(x, y, y') = 0, \; y(x_0) = y_0 \tag{3}$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Burada, $F(x, y, y')$, $(x_0, y_0, y_0')$ noktasını içeren herhangi $\Omega \subset R^3$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon, $y_0'$ ise cebirsel $F(x_0, y_0, y') = 0$ denkleminin gerçel köküdür.

(3) probleminin çözümüyle ilgili aşağıdaki teoremi de ispatsız kabul edelim.

**TEOREM 5** **(varlık ve teklik).** Merkezi $(x_0, y_0, y_0')$ noktasında bulunan herhangi $\Omega$ dikdörtgenler prizmasında:

**(a)** $F(x, y, y')$ fonksiyonu ve $\dfrac{\partial F(x, y, y')}{\partial y}$, $\dfrac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'}$ kısmi türevleri tüm değişkenlerine göre sürekliyse;

**(b)** $\dfrac{\partial F(x_0, y_0, y_0')}{\partial y'} \neq 0$ ise, $x_0$'ın belli bir civarında $F(x, y, y') = 0$ denkleminin

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0'$$

koşullarını sağlayan tek bir çözümü vardır.

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 2.3 için)

**1.** Aşağıdaki denklemlerin çözümlerinin varlık ve teklik bölgelerini bulun.

**(a)** $y' = x + y^2$ **(b)** $y' = x^3 - y^2$ **(c)** $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$

(d) $y' = x + \cot y$ (e) $y' = x + \ln(x + y)$

(f) $y' = x^2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ (g) $y' = x^2 + \sqrt{x^2 - y^2}$

(h) $y' = y^2 + \sqrt{x - y^2}$ (i) $y' = 3x + 2y\sqrt{y - 1}$

2. $y' = y^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, $y(0) = 0$ başlangıç değer probleminin, $y = 0$ ve $y = [(1-\alpha)x]^{1/(1-\alpha)}$ olmak üzere en azından iki tane çözümünün varlığının nedenini açıklayın.

## 2.4 DEĞİŞKENLERİ AYRILABİLİR DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Birinci mertebeden

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

veya

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1*}$$

diferansiyel denklemi verilmiş olsun. Burada ve ileride, özel olarak belirtilmedikçe, $f(x,y)$, $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonlarının $xOy$ düzleminin herhangi $D$ bölgesinde tanımlı ve Cauchy teoreminin koşullarını sağlayan belli fonksiyonlar olduğunu kabul edeceğiz.

$D$ bölgesinde $N(x, y) \neq 0$ olduğunda

$$f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

kabul edersek, $D$'de (1) ve (1*) denklemlerinin özdeşliği konusunda kuşku yoktur. Eğer $D$ bölgesinin kimi noktalarında $N(x, y) = 0$ oluyorsa, o zaman (1) ve (1*) denklemleri $D$ bölgesinin yalnız $N(x, y) \neq 0$ olduğu noktalarında özdeştir.

Şimdi, sözü edilen denklemlerin aşağıdaki özel durumlarını inceleyelim.

### 2.4.1 Değişkenleri Ayrılmış Denklemler

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \tag{2}$$

şeklindeki denkleme *değişkenleri ayrılmış denklem* denir.

Değişkenleri ayrılmış denklemi çözmek için, her iki tarafın $x$'e göre integralini almak gerekir (integral alırken $dy = y'dx$ olduğu göz önünde tutulur):

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C \tag{3}$$

(1*) ve (1) denklemlerinden görüleceği gibi,

$$M(x,y) = M(x), \quad N(x,y) = N(y) \text{ ve } f(x,y) = f(x)$$

olduğunda, sözü edilen denklemler değişkenleri ayrılmış denkleme dönüşür.

---

**ÖRNEK 1** Aşağıdaki denklemleri çözün.

**(a)** $3x^2dx + \sin y dy = 0$ **(b)** $y' = e^{2x}$

○ **(a)** Denklem, değişkenleri ayrılmış olduğundan (3) formülü uygulanabilir.

$$3\int x^2dx + \int \sin y dy = C \quad \text{yani} \quad x^3 - \cos y = C$$

**(b)** Denklemi $dy = e^{2x}dx$ şeklinde yazıp her iki tarafın $x$'e göre integralini alalım:

$$y = \int e^{2x}dx + C \quad \text{yani} \quad y = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$ ○

---

### 2.4.2 Değişkenleri Ayrılabilir Denklemler

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0 \tag{4}$$

şeklindeki denkleme *değişkenleri ayrılabilir denklem* denir ve her iki tarafın $M_2(y)N_1(x)$ çarpımına bölünmesiyle,

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0$$

şeklinde değişkenleri ayrılmış denkleme dönüşür.

Görüldüğü gibi, (1*) ve (1) denklemlerinde sırasıyla

$$M(x,y) = M_1(x)M_2(y), \quad N(x,y) = N_1(x)N_2(y) \text{ ve } f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$$

şeklinde gösterilebilirse, sözü edilen denklemler, değişkenleri ayrılabilir denkleme dönüşür.

---

**ÖRNEK 2** Aşağıdaki problemleri çözün.

**(a)** $xydx + (1 + x)(1 - y)dy = 0, \; y(1) = 2$

**(b)** $y' = e^{x-y}, \; y(0) = 1$

○ **(a)** Ele alınan denklem değişkenleri ayrılabilir olduğundan, her iki tar
$(1+x)y$ çarpımına bölüp

$$\frac{x}{1+x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0$$

yazabiliriz. Her iki tarafın $x$'e göre integralini alırsak,

$$\int \frac{x}{1+x}dx + \int \frac{1-y}{y}dy = C$$

$$\int\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx + \int\left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = C$$

$$x - \ln|1+x| + \ln|y| - y = C \qquad \text{veya} \qquad x - y + \ln\left|\frac{y}{1+x}\right| = C$$

elde ederiz yani genel çözümü (integrali) bulmuş oluruz.

Şimdi $C$ sabitini başlangıç koşulunun sağlanacağı şekilde seçelim. Bunun için, başlangıç koşulunu genel integralde göz önüne alıp

$$1 - 2 + \ln\frac{2}{1+1} = C \quad \text{yani} \quad C = -1$$

buluruz. Böylece, aranan özel çözüm

$$x - y + \ln\left|\frac{y}{1+x}\right| + 1 = 0$$

olur;

**(b)** Denklemi

$$y' = e^x e^{-y}$$

şeklinde yazdığımızda, bunun değişkenleri ayrılabilir denklem olduğunu görüyoruz. Bunu önce

$$e^y dy = e^x dx$$

şeklinde yazıp genel çözümünü bulalım:

$$\int e^y dy = \int e^x dx + C \Rightarrow e^y - e^x = C$$

Şimdi, başlangıç koşulunu genel çözümde göz önüne alıp $C$'yi belirleyelim:

$$e^1 - e^0 = C \Rightarrow C = e - 1$$

Bulunan $C$'yi genel çözümde yerine yazarsak, aranan özel çözümü

dönüşümünün yardımıyla

$$\frac{1}{b}(u' - a) = f(u) \text{ yani } u' = bf(u) + a$$

şeklinde değişkenleri ayrılabilir denklem haline getirilir.

---

**ÖRNEK 5** $y' = \dfrac{3}{(3x + 4y + 1)^2}$ denklemini çözün.

○ $u = 3x + 4y + 1$ yerine koymasını kullanırsak, $y' = \frac{1}{4}(u' - 3)$ olur ve ele alınan denklem değişkenleri ayrılabilir denkleme dönüşür:

$$\frac{1}{4}(u' - 3) = \frac{3}{u^2} \text{ yani } u' = \frac{3(u^2 + 4)}{u^2}$$

Buradan,

$$\frac{u^2}{u^2 + 4}du = 3dx \text{ yani } \left(1 - \frac{4}{u^2 + 4}\right)du = 3dx$$

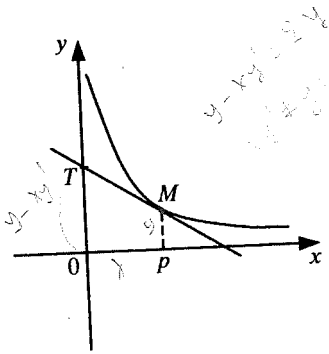
yazıp her iki tarafın $x$'e göre integralini alırsak,

$$u - 2\arctan\frac{u}{2} = 3x + C$$

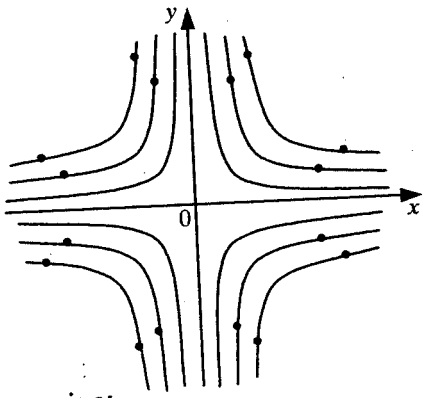
diferansiyel denkleminin elde edeb[illegible]

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0, \Rightarrow \ln|y| + \ln|x| = \ln C, \Rightarrow xy = C$$

elde ederiz [ $\ln C$ sabiti de, $C > 0$ için $(-\infty + \infty)$ aralığındaki bütün değerleri alabildiğinden, hesaplamanın basitliği için, gerektiğinde, keyfi sabit yerine $\ln C$ kullanacağız]. Demek ki, aranan aile hiperbol ailesidir (Şekil 9*b*). ○




**ŞEKİL 9a**




**ŞEKİL 9b**

elde ederiz. Son eşitlikte yerine koymayı göz önüne aldığımızda, çözümü

$$3x + 4y + 1 - 2\arctan\frac{3x + 4y + 1}{2} = 3x + C$$

yani,

$$y - \frac{1}{2}\arctan\frac{3x + 4y + 1}{2} = C_1 \quad \left(C_1 = \frac{C - 1}{4}\right)$$

olarak buluruz. ○

---

**2.**
$$y' = \frac{y}{x}f(xy) \tag{7}$$

şeklindeki diferansiyel denklemler de, değişkenleri ayrılabilir denklem haline getirilebilir. Gerçekten,

$$u = xy \quad \text{yani} \quad y = \frac{u}{x} \tag{8}$$

dönüşümü yapıldığında, $y' = \dfrac{u'x - u}{x^2}$ olur ve denklem,

$$\frac{u'x - u}{x^2} = \frac{u}{x^2}f(u) \qquad \text{yani} \qquad u'x = u + uf(u)$$

değişkenleri ayrılabilir denklemine dönüşür.

---

**ÖRNEK 6** $y' = \dfrac{y}{x(1 + xy)}$, $y(1) = 2$ başlangıç değer problemini çözün.

○ Denklemin

$$y' = \frac{y}{x}\frac{1}{1 + xy}$$

yani (7) biçiminde olduğunu göz önüne alıp (8) yerine koymasını uyguladığımızda, verilen denklem

$$\frac{u'x - u}{x^2} = \frac{u}{x^2(1 + u)} \quad \text{yani} \quad u'x = u + \frac{u}{1 + u}$$

şeklini alır. Buradan,

$$xdu = \frac{2u + u^2}{1 + u}dx$$

$$\frac{u+1}{u(u+2)}du = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u+2}\right)du = \int\frac{dx}{x} + \ln C$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln|u| + \ln|u+2|\right) = \ln|x| + \ln C$$

$$u(u+2) = (Cx)^2$$

elde ederiz.

Son eşitlikte, yerine koymayı göz önüne aldığımızda, verilen denklemin genel integralini,

$$xy(xy+2) = (Cx)^2 \quad \text{yani} \quad y(xy+2) = C^2x$$

olarak buluruz. Burada, başlangıç koşulu göz önüne alındığında, $C^2 = 8$ elde edilir ve problemin çözümü,

$$y(xy+2) = 8x$$

şeklinde bulunur. ○

---

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 2.4 için)

**1.** Aşağıdaki diferansiyel denklemleri çözün.

**(a)** $x^3y' = y^4$

**(b)** $e^{-x}y' = \cos^2 x$

**(c)** $\dfrac{y^3}{x^2}dy + \cos x^3 dx = 0$

**(d)** $y' = e^{2x+3y}$

**(e)** $x^2y' + a^2 + y^2 = 0$

**(f)** $y\cot x dx + (y^2+1)dy = 0$

**(g)** $(1+y^2)\sin^2 x dx - y^2 dy = 0$

**(h)** $yy' = e^{x+y^2}$

**(i)** $y' = \dfrac{4+y^2}{9+x^2}$

**(j)** $(y^2 + xy^2)dx + (x^2 - x^2y)dy = 0$

**(k)** $(1+y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - (1+y)dy = 0$

**2.** Aşağıdaki Cauchy problemlerini çözün.

**(a)** $y' = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$, $y(1) = 4$

**(b)** $y' = \dfrac{y-1}{x+1}$, $y(0) = 3$

(c) $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0,\ y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(d) $\frac{dy}{y} = \cos x dx,\ y(0) = 1$

3. Aşağıdaki diferansiyel denklemleri çözün.

(a) $y' = (3x + 2y + 1)^3 - \frac{3}{2}$ (b) $y' = \frac{1}{2x + 3y - 5}$

(c) $y' = \sin(x + y - 1) - 1$ (d) $y' = e^{x+y+1}$

(e) $y' = \frac{1}{x - y} + 1$ (f) $y' = (x + y)^2$

4. Aşağıdaki diferansiyel denklemleri çözün.

(a) $y' = \frac{y}{x}(x^2y^2 - 1)$ (b) $y' = \frac{y}{x}(x^2y^2 + 2)^2$

(c) $y' = \frac{y}{x}(x^2y^2 - 4)$ (d)* $y' = \frac{1}{x^2(1 + xy)}$

5. Her noktadaki teğetinin koordinat eksenleri arasındaki parçası teğet noktasında yarıya bölünen eğri ailesinin denklemini ve bu ailenin (1, 2) noktasından geçen eğrisini bulun.
6. Her noktadaki normalinin uzunluğu teğet noktasının ordinatının uzunluğuyla doğru orantılı olan eğri ailesinin denklemini bulun.
7. Her noktadaki teğetinin ordinat ekseninden ayırdığı parça teğet noktasının ordinatının $k$ katına eşit olan eğri ailesinin denklemini bulun ($k > 0$).
8. Her noktadaki normalinin apsis ekseninden ayırdığı parça teğet noktasının $k$ katına eşit olan eğri ailesinin denklemini bulun ve $k$'ye bağlı olarak eğri ailesinin türünü belirleyin ($k > 0$).

## 2.5 TÜRDEŞ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE BUNLARA DÖNÜŞTÜRÜLEBİLEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

### 2.5.1 Türdeş Fonksiyon Tanımı

**Tanım 1** Tanım bölgesinde, keyfi $t > 0$ için,

$$f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x, y) \tag{1}$$

eşitliğini sağlayan $f(x, y)$ fonksiyonuna $\alpha$ *dereceden türdeş fonksiyon* denir. Burada $\alpha \in R$ herhangi sayı olup, $f(x, y)$ *fonksiyonunun türdeşlik derecesi* diye adlandırılır.

Örneğin, $f(x,y) = \dfrac{x^2 + 2y^2}{3x^2 - y^2}$ fonksiyonu;

$$f(tx,ty) = \frac{(tx)^2 + 2(ty)^2}{3(tx)^2 - (ty)^2} = \frac{x^2 + 2y^2}{3x^2 - y^2} = f(x,y)$$

olduğu için, 0 dereceden türdeş fonksiyondur ($t^0 = 1$). Benzer şekilde, $f(x,y) = \dfrac{x^2 - 3xy}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}$ fonksiyonunun $\dfrac{4}{3}$ dereceden, $f(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3 \sin \frac{x}{y}}{(x+y)^4}$ fonksiyonunun ise $-1$ dereceden türdeş fonksiyon olduğu gösterilebilir. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{x+y+1}}$ fonksiyonu, $\alpha$'nın hiçbir değerinde (1) eşitliğini sağlamadığından türdeş fonksiyon değildir.

### 2.5.2 Türdeş Diferansiyel Denklemler

**Tanım 2** $f(x,y)$ fonksiyonu, 0 dereceden türdeş fonksiyon olduğunda,

$$y' = f(x,y) \tag{2}$$

denklemine *türdeş diferansiyel denklem* denir.

**Uyarı 1** Sıfır dereceden türdeş fonksiyon için $f(x,y) = f(tx,ty)$ eşitliğinde $t = \dfrac{1}{x}$ kabul edildiğinde, $f(x,y) = f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$, yani $f(x,y) = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$ olduğundan, (2) türdeş denklemi,

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2*}$$

şeklinde de yazılabilir. Örneğin, $y' = \dfrac{x+y}{3x-y}$ türdeş denklemi, $y' = \dfrac{1 + y/x}{3 - y/x}$ şeklinde de yazılabilir.

Açıktır ki,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3}$$

şeklindeki diferansiyel denklem, yalnız $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ aynı dereceden türdeş fonksiyonlar olduğunda türdeş denklemdir ($f(x,y) = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ olduğundan).

Türdeş diferansiyel denklemler,

$$y = ux \tag{4}$$

yerine koymasının yardımıyla, değişkenleri ayrılabilir denkleme getirilir. Burada $u = u(x)$, yeni bilinmeyen fonksiyondur.

Gerçekten, (4) eşitliğinden $y' = u'x + u$ bulup $y$ ve $y'$'nün ifadelerini (2) denkleminde göz önüne alırsak,

$$u'x + u = f(x, ux)$$

$$u'x = f(1,u) - u$$

$$\frac{du}{f(1,u) - u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{f(1,u) - u} = \int \frac{dx}{x} + \ln C$$

olur (işlem yapılırken, $f(x,ux) = f(1,u)$ olduğu kullanılmıştır). İntegraller hesaplandıktan sonra, yerine koymayı göz önüne alıp sonucu $x$ ve $y$ ile ifade etmek gerekir.

---

**ÖRNEK 1** $y' = \dfrac{y}{x} + \sin^2 \dfrac{y}{x}$ denklemini çözün.

○ Denklemin türdeş olduğu açıktır. Bu yüzden, (4) yerine koymasını kullanırsak,

$$u'x + u = u + \sin^2 u$$

$$\frac{du}{\sin^2 u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = \int \frac{dx}{x} + \ln C$$

$$\cot u + \ln C|x| = 0$$

olur. Burada, $u = \dfrac{y}{x}$ olduğunu göz önüne alırsak,

$$\cot \frac{y}{x} + \ln C|x| = 0$$

genel integralini, buradan da,

$$y = -x\operatorname{arc\,cot} \ln C|x|$$

genel çözümünü elde ederiz. ○

---

**ÖRNEK 2** $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$ denkleminin $y(1) = 2$ koşulunu sağlayan çözümünü bulun.

○ $M(x, y) = x^2 + y^2, N(x, y) = -2xy$ olup, ikinci mertebeden türdeş fonksiyonlar olduğu açıktır. Önce genel çözümü bulalım. Bunun için (4) yerine koymasını kullanırsak ($dy = udx + xdu$),

$$(x^2 + x^2u^2)dx - 2x^2u(udx + xdu) = 0$$

$$(1 - u^2)dx - 2xudu = 0$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{2udu}{1-u^2} = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{udu}{1-u^2} = \ln C$$

$$\ln|x| + \ln|1 - u^2| = \ln C \qquad \text{yani} \qquad x(1 - u^2) = C$$

elde ederiz. Burada, yerine koymayı göz önüne aldığımızda,

$$x^2 - y^2 = Cx$$

genel integralini elde ederiz.

Başlangıç koşulunu göz önüne alırsak,

$$1 - 4 = C \quad \text{yani} \quad C = -3$$

olarak bulunur. Demek ki, ele alınan problemin çözümü (özel çözüm),

$$x^2 - y^2 + 3x = 0$$

şeklindedir. Bulunan çözüm,

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

şeklinde de yazılabilir. ○

---

**Uyarı 2** Şekil açısından türdeş denkleme "benzer"

$$y' = x^{\alpha-1}F\left(\frac{y}{x^{\alpha}}\right) \tag{5}$$

şeklindeki diferansiyel denklemler ($\alpha = 1$ durumunda (2*) denklemi elde edilir),

$$y = ux^{\alpha} \quad (y' = u'x^{\alpha} + \alpha ux^{\alpha-1}) \tag{6}$$

yerine koymasının yardımıyla, değişkenleri ayrılabilir denkleme dönüştürülür.

---

**ÖRNEK 3** $xydy - (x^4 + y^2)dx = 0$ denklemini çözün.

○ Verilen denklemi,

$$y' = \frac{x^4 + y^2}{xy}$$

şeklinde yazıp sağ tarafı

$$\frac{x^4 + y^2}{xy} = \frac{x^4\left(1 + \frac{y^2}{x^4}\right)}{x^3\frac{y}{x^2}} = x\frac{1 + \left(\frac{y}{x^2}\right)^2}{\frac{y}{x^2}}$$

gibi düzenlersek,

$$y' = x\frac{1 + \left(\frac{y}{x^2}\right)^2}{\frac{y}{x^2}}$$

olur. Yani, ele alınan denklem, $\alpha = 2$ ve $F\left(\frac{y}{x^2}\right) = \dfrac{1 + \left(\frac{y}{x^2}\right)^2}{\frac{y}{x^2}}$ olmak üzere (5) şeklinde denklemdir ve

$$y = ux^2 \quad (y' = u'x^2 + 2ux)$$

yerine koymasının yardımıyla çözülebilir. Buna göre,

$$u'x^2 + 2ux = x\frac{1 + u^2}{u}$$

$$u'x = \frac{1 + u^2}{u} - 2u$$

$$\frac{udu}{1-u^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{udu}{1-u^2} = \int \frac{dx}{x} + \ln C$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1-u^2\right| = \ln C|x|$$

$$\frac{1}{1-u^2} = C^2x^2$$

olur. Burada, yerine koymayı göz önüne alırsak ele alınan denklemin

$$\frac{x^2}{x^4-y^2} = C^2$$

genel integralini buluruz. ○

---

**ÖRNEK 4** $y' = ax^r + by^s$ denkleminde $(r, s \in R)$, $r$ ile $s$ arasında hangi ilişki olmalıdır ki, sözü edilen denklem (5) şeklinde olsun? $r = -2$, $a = b = \frac{1}{2}$ durumu için denklemi çözün.

○ Soruyu yanıtlamak için, önce denklemin sağ tarafını,

$$ax^r + by^s = x^r\left(a + b\frac{y^s}{x^r}\right) = x^r\left[a + b\left(\frac{y}{x^{r/s}}\right)^s\right]$$

gibi düzenleyerek, onu

$$y' = x^r\left[a + b\left(\frac{y}{x^{r/s}}\right)^s\right]$$

şeklinde yazalım. Elde edilen denklemin (5) şeklinde olması için,

$$r + 1 = \frac{r}{s} \quad \text{yani} \quad s = \frac{r}{1+r}$$

olması gerekir.

Şimdi, $r = -2$, $a = b = \frac{1}{2}$ kabul edelim. O zaman $s = 2$ olur ve denklem,

$$y' = \frac{1}{2}(x^{-2} + y^2) \quad \text{yani} \quad y' = \frac{1}{2}x^{-2}\left[1 + \left(\frac{y}{x^{-1}}\right)^2\right]$$

şeklini alır. $\alpha = -1$ olduğundan, (6) yerine koyması, $y = ux^{-1}$ ($y' = u'x^{-1} - x^{-2}u$) olarak seçilir ve denklem,

$$u'x^{-1} - x^{-2}u = \frac{1}{2}x^{-2}(1 + u^2) \quad \text{yani} \quad 2u'x = 1 + 2u + u^2$$

şekline dönüşür. Buradan,

$$\frac{2du}{(1+u)^2} = \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{2}{1+u} = \ln Cx$$

sonuçta ise,

$$(1 + xy)\ln Cx + 2 = 0$$

genel integrali bulunur. ○

---

### 2.5.3 Türdeş Denkleme Dönüştürülebilen Diferansiyel Denklemler

Şimdi,

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{7}$$

şeklindeki denklemi ele alalım. Burada, $a_i, b_i, c_i$ $(i = 1, 2)$ belli sabitler, $f(u)$ ise tanım bölgesinde sürekli fonksiyondur.

Katsayılara bağlı olarak, (7) denklemi için aşağıdaki durumları inceleyelim:

**(a)** $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} (= \lambda)$ durumunda, yani $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ doğruları aynı olduğunda, $a_2 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda b_1$, $c_2 = \lambda c_1$ eşitliklerini göz önüne alırsak, (7) denklemi,

$$y' = f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{yani} \quad y' = k\,(\text{sabit})$$

şeklini alır ve genel çözüm. $y = kx + C$ olur;

**(b)** $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} (= \lambda) \neq \frac{c_2}{c_1}$ yani, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ doğruları paralel olduğunda, $a_2 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda b_1$ eşitliklerini göz önüne alırsak,

$$f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y+c_1)+c_2-\lambda c_1}\right)=F(a_1x+b_1y+c_1)$$

olur ve (7) denklemi,

$$y'=F(a_1x+b_1y+c_1)$$

şeklini alır ve belli yöntemle çözülür (bkz. Bölüm 2.4);

(c) $\frac{a_2}{a_1}\neq\frac{b_2}{b_1}$, yani, $a_1x+b_1y+c_1=0$ ve $a_2x+b_2y+c_2=0$ doğruları kesiştiğinde,

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$$

denklem sisteminin tek bir çözümü vardır (Bkz. Bölüm 1.5). Bu çözümü $(x_0,y_0)$ ile gösterip

$$\begin{cases}x=X+x_0\\y=Y+y_0\end{cases}$$

dönüşümünü yaparsak (o zaman, $y'=\frac{dY}{dx}=\frac{dY}{dX}\frac{dX}{dx}=\frac{dY}{dX}$ olur), (7) denklemi

$$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right) \tag{8}$$

şeklini alır ((8) denklemini yazarken, $a_1x_0+b_1y_0+c_1=0$ ve $a_2x_0+b_2y_0+c_2=0$ olduğunu göz önüne aldık).

(8) denkleminin türdeş denklem olduğu açıktır ve belli yöntemle çözülür.

Sonuç olarak, $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\frac{c_2}{c_1}$ *ve* $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}\neq\frac{c_2}{c_1}$ *durumlarında (7) denklemi değişkenleri ayrılabilir denkleme,* $\frac{a_2}{a_1}\neq\frac{b_2}{b_1}$ *durumunda ise türdeş denkleme dönüştürülür* diyebiliriz.

---

**ÖRNEK 5** $y'=-\frac{5x+4y-4}{4x+5y-5}$ denkleminin $y(0)=2$ koşulunu sağlayan çözümünü bulun.

○ Önce, $a_1=5, b_1=4, a_2=4, b_2=5$ ve $\frac{5}{4}\neq\frac{4}{5}$ olduğunu göz önüne alıp

$$\begin{cases}5x+4y-4=0\\4x+5y-5=0\end{cases}$$

denklem sisteminin $x_0 = 0, y_0 = 1$ çözümünü buluruz. Bu nedenle,

$$\begin{cases} x = X \\ y = Y + 1 \end{cases}$$

dönüşümünü yaparsak, denklem,

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{5X + 4Y}{4X + 5Y}$$

şeklini alır. Burada, $Y = uX$ yerine koymasını yaparsak $(Y' = u'X + u)$, denklem,

$$u'X + u = -\frac{5 + 4u}{4 + 5u} \quad \text{yani} \quad \frac{5u + 4}{5u^2 + 8u + 5}du = -\frac{dX}{X}$$

şekline dönüşür. Buradan,

$$\frac{1}{2}\ln(5u^2 + 8u + 5) = \ln C - \ln|X| \quad \text{yani} \quad 5u^2 + 8u + 5 = \frac{C^2}{X^2}$$

elde ederiz. Yerine koymayı göz önüne aldığımızda,

$$5\left(\frac{Y}{X}\right)^2 + 8\frac{Y}{X} + 5 = \left(\frac{C}{X}\right)^2 \quad \text{veya} \quad 5Y^2 + 8XY + 5X^2 = C^2$$

olur. Dönüşümü göz önüne aldığımızda ise,

$$5(y - 1)^2 + 8x(y - 1) + 5x^2 = C^2 \text{ veya}$$
$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 8x - 10y + 5 = C^2$$

genel integrali bulunur. Başlangıç koşuluna göre, $C^2 = 5$ olarak bulunur ve aranan özel çözüm

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 8x - 10y = 0$$

olarak bulunur. ○

---

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 2.5 için)

**1.** Aşağıdaki denklemleri çözün.

**(a)** $x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$ **(b)** $(x + 3y)dx - 2xdy = 0$

**(c)** $(2x + y)dx - xdy = 0$ **(d)** $(ax + by)dx - xdy = 0, (b \neq 0)$

(e) $y' = \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^4}$ (f) $y' = \dfrac{y^3 - 2xy^2}{xy^2 - 2x^2 y}$

(g) $\dfrac{dx}{x + y} = \dfrac{dy}{y - x}$ (h) $\dfrac{dx}{2(x^2 - xy + y^2)} = \dfrac{dy}{y^2 - 4xy}$

(i) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ (j) $y' = e^{y/x} + \dfrac{y}{x}$

(k) $y' = \dfrac{3x^2 + 3xy + y^2}{x^2 + 2xy}$ (l) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\varphi(y/x)}{\varphi'(y/x)}$

(m) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$ (n) $y' = -\dfrac{4x^2 + 3xy + y^2}{x^2 + 3xy + 4y^2}$

2. Aşağıdaki Cauchy problemlerini çözün.

(a) $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0,\ y(1) = 0$

(b) $y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x},\ y(1) = 1$

(c) $(xy' - y)\arctan\dfrac{y}{x} = x,\ y(1) = 0$

(d) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0,\ y(0) = 1$

(e) $(x^2 + 2xy - y^2)dx - (x^2 - 2xy - y^2)dy = 0,\ y(1) = -1$

(f) $y(y')^2 + 2xy' - y = 0,\ y(0) = \sqrt{5}$

3. Aşağıdaki denklemleri çözün.

(a) $y' = x^3\left(1 + \dfrac{y}{x^4}\right)$ (b) $y' = x^2\left(3 + \dfrac{y}{x^3}\right)$

(c) $y' = x^4\left(2 - \dfrac{y}{x^5}\right)$ (d) $y' = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{y}{x}$

(e) $y' = \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{y}{x}$ (f) $y' = 2x^{-2} + y^2$

4. Keyfi $(x, y)$ noktasındaki teğetinin ordinat ekseninden ayırdığı parçanın karesi teğet noktasının koordinatlarının çarpımına eşit olan eğri ailesinin denklemini bulun.

5. Teğet altı parçası teğet noktasının koordinatlarının ortalama değerine eşit olan eğri ailesinin denklemini bulun.
6. Aşağıdaki denklemleri çözün.

(a) $y' = -\dfrac{3x + 3y - 1}{x + y + 1}$ (b) $y' = \dfrac{x + 2y + 1}{2x + 4y + 3}$

(c) $y' = \dfrac{x - y}{x - 2y - 1}$ (d) $y' = -\dfrac{x - 2y + 5}{2x - y + 4}$

(e) $y' = -\dfrac{2x + 3y}{3x - y - 11}$ (f) $y' = -\dfrac{x + 2y + 3}{x + 7}$

(g) $y' = \dfrac{x + 2y + 1}{2x - 3}$ (h) $y' = \dfrac{-7x + 3y + 7}{3x - 7y - 3}$

7. Keyfi $(x, y)$ noktasındaki normalinin ordinat ekseninden ayırdığı parçanın uzunluğu sözü edilen noktanın koordinat başlangıcından olan uzaklığına eşit olan eğri ailesinin denklemini bulun.
8. Her noktasındaki teğetinin ordinat eksenini kestiği nokta teğet noktasından ve koordinat başlangıcından aynı uzaklıkta olan eğri ailesinin denklemini bulun.

## 2.6 DOĞRUSAL DİFERANSİYEL DENKLEMLER BERNOULLİ VE RİCCATİ DENKLEMLERİ

### 2.6.1 Doğrusal Diferansiyel Denklemler

Aranan fonksiyon ve onun türevine göre doğrusal halde bulunan, yani

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{1}$$

şeklinde olan denkleme *birinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklem* denir. Burada $p(x)$ ve $f(x)$, belli aralıkta tanımlı ve sürekli fonksiyonlardır. $p(x) = 0$ veya $f(x) = 0$ durumlarında (1) denkleminin, değişkenleri ayrılabilir denklem olduğu açıktır. Ayrıca, $f(x) = 0$ durumunda elde edilen

$$y' + p(x)y = 0 \tag{2}$$

denklemine *birinci mertebeden doğrusal türdeş diferansiyel denklem* denir. Bunun genel çözümünün

$$y_T = Ce^{-\int p(x)dx} \tag{3}$$

şeklinde olacağı açıktır.

Doğrusal türdeş denklemi türdeş denklemlerle karıştırmamak gerekir. Örneğin,

$$y' + \sin\frac{y}{x} = 0, \qquad y' + \frac{y}{x} = 0, \qquad y' + \frac{y}{1+x^2} = 0$$

denklemlerinin birincisi türdeş denklemdir, ancak doğrusal değildir; ikincisi hem türdeş, hem de doğrusal türdeş denklemdir; üçüncüsü ise doğrusal türdeş denklemdir, ancak türdeş denklem değildir.

$$Q(x)y' + P(x)y = F(x) \qquad (Q(x) \neq 0) \tag{1*}$$

şeklindeki denklem, her iki tarafın $Q(x)$ 'e bölünmesiyle (1) şeklindeki denkleme getirilir. Demek ki, (1*) şeklindeki denklem de doğrusal denklemdir. Örneğin,

$$y' + 3x^2y = 2x, \qquad y' + y\sin x = 3\cos x, \qquad e^x y' + xy = e^{2x} \text{ vb.}$$

doğrusal denklemlerdir.

Doğrusal diferansiyel denklemlerin çeşitli çözüm yöntemleri vardır. Bunlardan, çok sık kullanılan aşağıdaki üç tanesini inceleyelim.

**1. Yerine Koyma (Bernoulli) Yöntemi** (1) denkleminin çözümünü,

$$y = u(x)v(x) \tag{4}$$

olmak üzere iki bilinmeyen fonksiyonun çarpımı şeklinde arayalım. O zaman, $y' = u'v + uv'$ olur. $y$ ve $y'$'nün ifadelerini (1) denkleminde yazarsak,

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x) \quad \text{veya} \quad u'v + u[v' + p(x)v] = f(x) \tag{5}$$

elde ederiz. Burada $v(x)$'i, köşeli parantez içindeki ifade sıfır olacak şekilde seçelim ($y$ bilinmeyeni, $u$ ve $v$ gibi iki tane bilinmeyenle ifade edildiğinden, bunlar arasında ikinci bir ilişkiye gereksinim vardır). O zaman,

$$v' + p(x)v = 0$$

doğrusal türdeş (değişkenleri ayrılabilir) denklemi elde edilir ve

$$v = e^{-\int p(x)dx} \quad \text{veya} \quad v = \exp\left(-\int p(x)dx\right) \tag{6}$$

bulunur ($C = 1$ aldık. Bilindiği gibi, basitlik için $e^u$ yerine $\exp u$ gösterimi de kullanılır). Bulunan $v$'yi (5) eşitliğinde yazarsak,

$$u'\exp\left(-\int p(x)dx\right) = f(x)$$

$$du = f(x)\exp\left(\int p(x)dx\right)dx$$

$$u = \int f(x)\exp\left(\int p(x)dx\right)dx + C$$

bulunur. Son olarak, bulunan $u$ ve $v$'yi (5) eşitliğinde yazdığımızda, (1) denkleminin genel çözümü için

$$y = \exp\left(-\int p(x)dx\right)\left[\int f(x)\left(\exp\int p(x)dx\right)dx + C\right] \quad \text{yani}$$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right] \tag{7}$$

elde ederiz. (7) formülüne *doğrusal denklemin genel çözüm formülü* denir.

**Uyarı 1** Doğrusal türdeş denklemin (6) çözümünde $C = 1$ yerine keyfi sabit alındığında da (7) genel çözümünün şekli değişmez.

**Uyarı 2** (7) eşitliğini,

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

şeklinde yazıp sağ tarafındaki ikinci toplamı

$$\tilde{y} = e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx \tag{8}$$

ile gösterelim. Her iki tarafın türevini alırsak,

$$\tilde{y}' = \left[e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]'$$

$$= -p(x)e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + e^{-\int p(x)dx}f(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$= -p(x)e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + f(x) \qquad \text{yani,}$$

$$\tilde{y}' = -p(x)e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + f(x)$$

elde ederiz. $\tilde{y}$ ve $\tilde{y}'$'yü (1) denkleminde $y$ ve $y'$ yerine yazarsak,

$$-p(x)e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + f(x) + p(x)e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx = f(x)$$

yani,

$$f(x) \equiv f(x)$$

özdeşliğini elde ederiz. Demek ki, (8) eşitliğiyle belirlenen $\tilde{y}$ fonksiyonu (1) denkleminin özel çözümüdür.

Böylece, (7) formülüne göre, *türdeş olmayan doğrusal denklemin çözümü* ($y$), *uygun doğrusal türdeş denklemin genel çözümü* ($y_T$) *ile, kendisinin herhangi özel çözümünün* ($\tilde{y}$) *toplamına eşittir,* yani,

$$y = y_T + \tilde{y} \tag{9}$$

*formülü doğrudur,* önermesi elde edilir.

Örnek çözülürken yukarıda açıklanan süreç tekrarlanabilir veya doğrudan (7) formülü uygulanabilir.

---

**ÖRNEK 1** $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$, $y(0) = 3$ başlangıç değer problemini çözün.

○ Tekrar için, yukarıda açıklanan süreci uygulayıp önce ele alınan denklemin genel çözümünü bulalım. (4) eşitliğini denklemde göz önüne alırsak,

$$u'v + uv' - \frac{2xuv}{1+x^2} = 1 + x^2$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2xv}{1+x^2}\right) = 1 + x^2 \tag{*}$$

olur. Burada,

$$v' - \frac{2xv}{1+x^2} = 0$$

kabul edersek,

$$\frac{dv}{v} = \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

ve sonuçta

$$v = 1 + x^2$$

elde ederiz. Bulunan $v$'yi (*) eşitliğinde göz önüne aldığımızda,

$$u'(1 + x^2) = 1 + x^2$$

$$u' = 1 \quad \text{yani} \quad u = x + C$$

buluruz ve ele alınan denklemin genel çözümü

$$y = (1 + x^2)(x + C)$$

şeklinde olur. Genel çözümde başlangıç koşulunu göz önüne aldığımızda, $C = 3$ elde ederiz. Böylece, aranan çözüm

$$y = (x + 3)(1 + x^2)$$

olur. ○

---

**ÖRNEK 2** Keyfi noktadaki teğetinin ordinat ekseninden ayırdığı parça teğet noktasının apsisinin $k$ katına $(k > 0)$ eşit olan eğri ailesinin denklemini yazın.

○ Denklemi aranan ailenin bir eğrisi $y = y(x)$ ve üzerindeki keyfi nokta $M(x, y)$ olsun (Şekil 11). Bu noktada teğet denklemi

$$Y - y = y'(X - x)$$

olarak yazılabilir. Burada, $X, Y$ ile teğetin cari noktasının koordinatları gösterilmektedir. Denklemden, teğetin ordinat eksenini kestiği noktanın $(X = 0)$ ordinatı, $OT = Y = y - xy'$ olarak bulunur. Koşula göre, $OT = kx$ olduğunu burada göz önüne alırsak,

$$y - xy' = kx \quad \text{veya} \quad y' - \frac{1}{x}y = -k$$

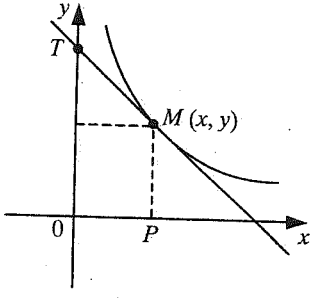
elde ederiz. Görüldüğü gibi denklem doğrusal diferansiyel denklemdir ve çözümü, (7) formülüne göre,

$$y = e^{\int \frac{dx}{x}}\left(C - k\int e^{-\int \frac{dx}{x}}dx\right)$$

yani,

$$y = x(C - k\ln|x|) \quad \text{veya} \quad x^k = Ce^{-y/x}$$

olarak bulunur. ○




**ŞEKİL 11**

**ÖRNEK 3** Kütlesi $m$ olan cisim, herhangi yükseklikten $v_0$ başlangıç hızıyla düşey olarak aşağı atılmıştır. Cismi ağırlık kuvvetinin ve hızıyla orantılı olarak direnç kuvvetinin (orantı katsayısı $k\,(>0)$ olsun) etkilediğini göz önünde bulundurarak hızın değişme yasasını bulun.

○ Hızın zamana bağlılığını $v = v(t)$ ile gösterelim, Newton'un ikinci yasasına göre,

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

yazılabilir. Burada $\frac{dv}{dt}$ ivme, $F$ ise cismi hareket yönünde etkileyen kuvvet olup, cismin ağırlık kuvveti $(mg)$ ve hava direncinden $(-kv)$ oluşmaktadır ($F = mg - kv$, eski işareti, direncin ters yönde olmasındandır).

Söylenenleri göz önüne alırsak,

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \quad \text{veya} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

yani doğrusal diferansiyel denklem elde ederiz $(p = k/m, f = g)$. Buradan (7) genel çözüm formülüne göre

$$v(t) = e^{-kt/m}\left(g\int e^{kt/m}dt + C\right) \quad \text{yani} \quad v(t) = \frac{mg}{k} + Ce^{-kt/m}$$

elde ederiz.

$C$ sabitini belirlemek için, genel çözümde başlangıç koşulunu, yani başlangıç anında $v(0) = v_0$ olduğunu göz önüne alırsak,

$$v(0) = \frac{mg}{k} + Ce^0 \quad \text{yani} \quad C = v_0 - \frac{mg}{k}$$

olur. Böylece, $v_0$ başlangıç hızıyla düşey olarak aşağı atılan cismin hızının değişme yasası

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m} + \frac{mg}{k}$$

olarak bulunur.

$v_0 = 0$ özel durumunda, düşey olarak aşağı bırakılan cismin hızının değişme yasası

$$v(t) = \left(1 - e^{-kt/m}\right)\frac{mg}{k}$$

olur. ○

**2. Euler Yöntemi** (1) denkleminin her iki tarafını $e^{\int p(x)dx}$ ile çarpıp ($e^{\int p(x)dx}$'e *integral çarpanı* denir), bunu

$$e^{\int p(x)dx}y' + p(x)e^{\int p(x)dx}y = f(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\left(e^{\int p(x)dx}y\right)' = f(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$e^{\int p(x)dx}y = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right] \tag{7}$$

şeklinde dönüştürürsek, çözüm için belli (7) formülünü elde ederiz.

**Uyarı 3** (1) denkleminin $y(x_0) = y_0$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümü arandığında aşağıdaki iki durum olasıdır.

(1) Genel çözüm formülünün sağ tarafındaki integraller hesaplanabilir ise, $C$ sabiti, başlangıç koşulana bağlı olarak, (7) eşitliğinden belirlenebilir (bkz. Örnek 1).

(2) Genel çözüm formülünün sağ tarafındaki integrallerden biri veya her ikisi hesaplanamaz ise (bkz. I, Bölüm 5.2), $C$ sabitini belirlemek için, sözü edilen eşitlik doğrudan uygulanamaz. Bu nedenle, integral çarpanını, $\exp\left(\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi\right)$ şeklinde alıp yukarıdaki işlemlere benzer olarak

$$\left[\exp\left(\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi\right)y\right]' = f(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi\right)$$

eşitliğinin her iki tarafının $[x_0, x]$ aralığında itegralini alırsak,

$$\exp\left(\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi\right)y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\exp\left(\int_{x_0}^{\xi} p(t)dt\right)d\xi$$

elde ederiz. Buradan, aranan özel çözüm için,

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi\right)\left[\int_{x_0}^{x} f(\xi)\exp\left(\int_{x_0}^{\xi} p(t)dt\right)d\xi + y_0\right] \tag{7*}$$

formülünü elde ederiz. (7*) formülüne *Cauchy formülü* de denir.

(7*) formülünün her iki durum için geçerli olduğunun altını çizelim.

**ÖRNEK 4** $y' + 2xy = e^{x^2}$, $y(1) = 2$ Cauchy problemini çözün.

○ $p(x) = 2x, f(x) = e^{x^2}, x_0 = 1, y_0 = 2$ olduğunu göz önüne alıp (7*) formülünü doğrudan uygularsak,

$$y = \exp\left(-2\int_1^x \xi d\xi\right)\left[\int_1^x e^{\xi^2} \exp\left(2\int_1^\xi t dt\right) d\xi + 2\right]$$

yani,

$$y = \exp\left(-\xi^2\Big|_1^x\right)\left[\int_1^x e^{\xi^2} \exp\left(t^2\Big|_1^\xi\right) + 2\right] \quad \text{veya} \quad y = e^{-(x^2-1)}\left(\int_1^x e^{2\xi^2-1} d\xi + 2\right)$$

elde ederiz. ○

---

**Uyarı 4** Kimi durumlarda (1) denklemi doğrusal olmayabilir, ancak $x$ fonksiyon, $y$ ise bağımsız değişken olarak kabul edildiğinde doğrusal denklem şekline getirilebilir.

---

**ÖRNEK 5** $y' = \dfrac{y}{3x + y^2}$ denklemini çözün.

○ Görüldüğü gibi, verilen denklem $y$'ye göre doğrusal değildir. Ancak, $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$ olduğunu göz önüne alırsak, denklem

$$\frac{1}{x'} = \frac{y}{3x + y^2}$$

yani, $x = x(y)$ fonksiyonuna göre

$$x' - \frac{3}{y}x = y$$

doğrusal denklemine dönüşür ($x'_y = x'$ olarak yazıldı) Buradan, genel çözüm formülüne göre,

$$x = e^{3\ln|y|}\left(\int ye^{-3\ln|y|}dy + C\right)$$

yani,

$$x = y^3\left(-\frac{1}{y} + C\right) \quad \text{veya} \quad x = y^2(Cy - 1)$$

genel integrali bulunur. ○

---

**3. Sabitin Değiştirilmesi (Lagrange) Yöntemi** (1) denklemine uygun türdeş denklemin (3) genel çözümünü yazıp $C$ 'yi $x$ 'in fonksiyonu olarak kabul edelim:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{10}$$

Şimdi $C(x)$'i, (10) fonksiyonu, (1) denklemini sağlayacak şekilde seçelim. Bunun için (10) eşitliğinden,

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$$

bulup $y$ ve $y'$'nün ifadelerini (1) denkleminde yazarsak,

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

yani,

$$C'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}$$

buradan da,

$$C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C^{\circ}$$

buluruz. Bulunan $C(x)$'i (10) eşitliğinde yazdığımızda, yine (1) denkleminin genel çözümünü ifade eden (7) formülünü elde ederiz.

İleride, Euler ve Lagrange yöntemlerinin yüksek mertebeden doğrusal denklemlere de uygulanabilirliğini göreceğiz.

---

**ÖRNEK 6** $y' + 2axy = 2bxe^{x^2}$ denkleminin, $y(0) = 2$ koşulunu sağlayan çözümünü bulun.

○ Önce, $p(x) = 2ax, f(x) = 2bxe^{x^2}$ olduğunu göz önüne alıp doğrudan (7) formülünü uygulayalım:

$$y = e^{-2a\int xdx}\left(2b\int xe^{x^2}e^{2a\int xdx}dx + C\right)$$

$$y = e^{-ax^2}\left[2b\int xe^{(1+a)x^2}dx + C\right]$$

Son eşitliğin sağ tarafındaki integral için $a$ 'ya bağlı olarak iki durum vardır.

(1) $a \neq -1$. Bu durumda, sözü edilen eşitlik

$$y = e^{-ax^2}\left[\frac{b}{1+a}e^{(1+a)x^2} + C\right]$$

şeklini alır. Burada, başlangıç koşulu göz önüne alındığında, $C = 2 - \dfrac{b}{1+a}$ olarak bulunur ve aranan özel çözüm

$$y = e^{-ax^2}\left[\frac{b}{1+a}e^{(1+a)x^2} + 2 - \frac{b}{1+a}\right]$$

olur;

(2) $a = -1$. Bu durumda, sözü edilen eşitlik

$$y = e^{x^2}\left(2b\int x dx + C\right) \quad \text{yani} \quad y = e^{x^2}(bx^2 + C)$$

şeklini alır. Başlangıç koşulu göz önüne alındığında, $C = 2$ olarak bulunur ve aranan özel çözüm,

$$y = e^{-x^2}(bx^2 + 2)$$

olur. ○

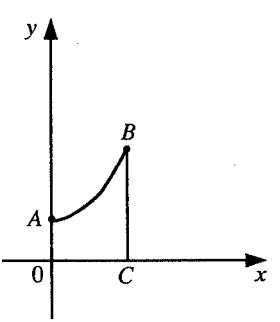
---

**ÖRNEK 7** Şekil 12'deki $AB$ eğrisini ve $A$ noktasını öyle seçin ki, $OABC$ eğrisel yamuğunun kütle merkezinin apsisi $B$ noktasının apsisinin $4/5$'ine eşit olsun ($A(0, 1)$ ve $\rho = sabit$).

○ $AB$ eğrisinin denklemi $y = y(x)$ olsun. Bunun şeklini belirleyelim. Eğrisel yamuğun kütle merkezinin ve $B$ noktasının apsisleri, sırasıyla $x_0$ ve $x$ ile gösterildiğinde,

$$x_0 = \frac{\int_0^x \xi y(\xi)d\xi}{\int_0^x y(\xi)d\xi}$$

eşitliği yazılabilir (bkz. I, Bölüm 7.5). Burada, koşula göre $x_0 = \dfrac{4}{5}x$ olduğunu göz önüne alırsak,




**ŞEKİL 12**

$$\frac{4}{5}x = \frac{\int_0^x \xi y(\xi)d\xi}{\int_0^x y(\xi)d\xi} \quad \text{ya da} \quad \int_0^x \xi y(\xi)d\xi = \frac{4}{5}x\int_0^x y(\xi)d\xi$$

olur. Son eşitliğin her iki tarafının $x$'e göre türevini alalım (bkz. 1, Bölüm 6.4):

$$\left(\int_0^x \xi y(\xi)d\xi\right)'_x = \left(\frac{4}{5}x\int_0^x y(\xi)d\xi\right)'_x$$

$$xy(x) = \frac{4}{5}\int_0^x y(\xi)d\xi + \frac{4}{5}xy(x)$$

$$xy(x) = 4\int_0^x y(\xi)d\xi$$

Yeniden her iki tarafın $x$'e göre türevini alalım:

$$\left(xy(x)\right)'_x = \left(4\int_0^x y(\xi)d\xi\right)'_x$$

$$y(x) + xy'(x) = 4y(x)$$

$$y'(x) - \frac{3}{x}y(x) = 0$$

Görüldüğü gibi, elde edilen denklem doğrusal türdeş denklemdir ve genel çözümü,

$$\ln y - 3\ln x = \ln C \quad \text{yani} \quad y = Cx^3$$

şeklindedir. Böylece, $AB$ eğrisinin denklemi $y = Cx^3$ olur. Denklemin şeklinden görüldüğü gibi, $A$ noktası koordinat başlangıcında olmalıdır ($C \neq 0$, keyfi sabittir). ○

---

**ÖRNEK 8** Kendi kendini indükleme özelliğine sahip bir elektrik devresinde, $I$, $v$, $R$ sırasıyla akım şiddeti, gerilim ve direnç, $L$ ise kendi kendini indükleme katsayısı olduğunda, $t$ anında akım şiddeti,

$$v = IR + L\frac{dI}{dt}$$

eşitliğiyle belirlenir. Buradan,

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{v}{L}$$

yani, akım şiddetine göre doğrusal denklem elde edilir. Başlangıç anında ($t = 0$), akım şiddetinin $I_0$ olduğunu kabul edip ($I(0) = I_0$), ele alınan elektrik devresinde akım şiddetinin değişme yasasını bulalım.

○ Çözüm için Cauchy formülünü kullanarak, sözü edilen başlangıç değer probleminin çözümünü yazalım ($R$, $v$, $L$ pozitif sabitlerdir):

$$I(t) = \exp\left(-\int_0^t \frac{R}{L}\,dt\right)\left[\int_0^t \frac{v}{L}\exp\left(\int_0^\xi \frac{R}{L}\,d\tau\right)d\xi + I_0\right]$$

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{v}{L}\int_0^t e^{\frac{R}{L}\xi}\,d\xi + I_0\right)$$

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{v}{L}\cdot\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}\xi}\Big|_0^t + I_0\right)$$

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{v}{R}\left(e^{\frac{R}{L}t} - 1\right) + I_0\right]$$

$$I(t) = \frac{v}{R} + e^{-\frac{R}{L}t}\left(I_0 - \frac{v}{R}\right)$$

Bulunan çözümden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

(1) $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\frac{R}{L}t} = 0$ olduğundan, $I = \dfrac{v}{R}$ olur (Ohm yasası);

(2) Devre kapandığında ($I_0 = 0$),

$$I(t) = \frac{v}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad \text{ve} \quad t \to \infty\text{'da } I \to \frac{v}{R}$$

olur;

(3) Devre açıldığında ($v = 0$),

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad \text{ve} \quad t \to \infty\text{'da } I \to 0$$

olur. ○

---

### 2.6.2 Bernoulli Denklemi

$$y' + p(x)y = f(x)y^\alpha \quad (\alpha \in R) \tag{11}$$

şeklindeki diferansiyel denkleme *Bernoulli denklemi* denir. Bernoulli denkleminin, $\alpha = 0$ durumunda doğrusal denkleme, $\alpha = 1$ durumunda ise doğ-

rusal türdeş denkleme, aynı zamanda değişkenleri ayrılabilir denkleme dönüştüğü açıktır. Bu nedenle $\alpha \neq 0,1$ kabul edeceğiz. $\alpha > 0$ durumunda, $y = 0$ 'ın Bernoulli denkleminin çözümü olduğu ( *açık çözüm*) açıktır.

Bernoulli denklemi, doğrusal denklemde olduğu gibi, $y = uv$ yerine koymasının yardımıyla çözülür.

---

**ÖRNEK 9** $y' + 4xy = 2e^{-x^2}\sqrt{y}$ denklemini çözün.

○ (4) yerine koymasını doğrusal denkleme uygulandığı şekilde kullanalım:

$$u'v + uv' + 4xuv = 2e^{-x^2}\sqrt{u}\sqrt{v}$$

$$u'v + u(v' + 4xv) = 2e^{-x^2}\sqrt{u}\sqrt{v} \qquad (*)$$

Burada,

$$v' + 4xv = 0$$

kabul edip bulunan $v = e^{-2x^2}$ fonksiyonunu (*)'da göz önüne alırsak,

$$u'e^{-2x^2} = 2e^{-x^2}\sqrt{u}e^{-x^2}$$

$$\frac{du}{2\sqrt{u}} = dx$$

$$\sqrt{u} = x + C$$

$$u = (x + C)^2$$

buluruz.

Son olarak, bulunan $u$ ve $v$ 'yi yerine koymada göz önüne aldığımızda, aranan genel çözüm

$$y = e^{-2x^2}(x + C)^2$$

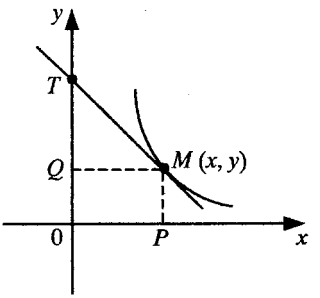
olarak bulunur. ○

---

**Uyarı 5** Bernoulli denklemi, her iki tarafı $y^{\alpha}$ 'ya bölüp $[y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = f(x)]$,

$$y^{1-\alpha} = z \qquad \left(z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'\right) \qquad (12)$$

yerine koymasının yardımıyla, yeni bilinmeyen $z(x)$ fonksiyonuna göre doğrusal denkleme getirilerek de çözülebilir.




**ŞEKİL 13**

**ÖRNEK 10** Teğetinin ordinat ekseninden ayırdığı parça teğet noktasının ordinatının karesiyle doğru orantılı olan eğri ailesinin denklemini bulun.

○ Aranan ailenin bir denkleminin $y = y(x)$ olduğunu varsayalım (Şekil 13). O zaman, her $M(x, y)$ noktasındaki teğetinin denklemi

$$Y - y = y'(X - x)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $X, Y$ ile teğetin cari noktasının koordinatları gösterilmektedir. Teğetin ordinat eksenini kestiği noktanın $(X = 0)$ ordinatı $OT = Y = y - xy'$ olduğundan, koşula göre, aranan aile için

$$\frac{y - xy'}{y^2} = k$$

olacaktır ($k$, orantı katsayısıdır). Bulunan denklemin,

$$y' - \frac{1}{x}y + \frac{k}{x}y^2 = 0$$

şeklinde Bernoulli denklemi olduğu açıktır ($\alpha = 2$). Her iki tarafı $y^2$'ye bölüp, elde edilen

$$y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-1} = -\frac{k}{x}$$

denkleminde $y^{-1} = z$ yerine koyması yaparsak ($y^{-2}y' = -z'$),

$$z' + \frac{1}{x}z = \frac{k}{x}$$

doğrusal denklemini elde ederiz. (7) formülüne göre, bunun genel çözümünü

$$z(x) = \exp\left(-\int \frac{dx}{x}\right)\left[k\int \frac{1}{x}\exp\left(\int \frac{dx}{x}\right)dx + C\right] \quad \text{yani} \quad z(x) = \frac{kx + C}{x}$$

olarak buluruz. Yerine koymayı göz önüne aldığımızda, aranan eğri ailesinin denklemini

$$y = \frac{x}{kx + C}$$

olarak buluruz. ○

---

**Uyarı 6** Doğrusal denklemin genel çözüm formülüne benzer olarak, Bernoulli denkleminin de genel çözüm formülü çıkarılabilir. Bunun için, (11) denkleminin her iki tarafını $\exp\left(\int p(x)dx\right)$ ile çarpıp aşağıdaki şekilde dönüştürelim:

$$\exp\left(\int p(x)dx\right)y' + \exp\left(\int p(x)dx\right)p(x)y = \exp\left(\int p(x)dx\right)f(x)y^{\alpha}$$

$$\left[\exp\left(\int p(x)dx\right)y\right]' = \exp\left(\int p(x)dx\right)f(x)y^{\alpha}$$

$$\frac{\left[\exp\left(\int p(x)dx\right)y\right]'}{\left[\exp\left(\int p(x)dx\right)y\right]^{\alpha}} = \left[\exp\left(\int p(x)dx\right)\right]^{1-\alpha} f(x)$$

Burada $\exp\left(\int p(x)dx\right)y = u(x)$ kabul edersek,

$$\frac{du}{u^{\alpha}} = f(x)\exp\left((1-\alpha)\int p(x)dx\right)dx$$

$$\int \frac{du}{u^{\alpha}} = \int f(x)\exp\left((1-\alpha)\int p(x)dx\right)dx$$

$$\frac{1}{1-\alpha}u^{1-\alpha} = \int f(x)\exp\left((1-\alpha)\int p(x)dx\right)dx + C$$

$$u = \left\{(1-\alpha)\left[\int f(x)\exp\left((1-\alpha)\int p(x)dx\right)dx + C\right]\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

elde ederiz. Son eşitlikte $u(x)$ 'in ifadesini göz önüne alırsak,

$$y = \exp\left(-\int p(x)dx\right)\left\{(1-\alpha)\left[\int f(x)\exp\left((1-\alpha)\int p(x)dx\right)dx + C\right]\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (13)$$

yani Bernoulli denkleminin genel çözüm formülünü buluruz. $\alpha = 0$ durumunda (13) formülünün (7) formülüne dönüştüğü açıktır.

### 2.6.3 Riccati Denklemi

$$y' + p(x)y + q(x) = f(x)y^2 \quad (14)$$

şeklindeki diferansiyel denkleme *Riccati*[1] *denklemi* denir. $q(x) \equiv 0$ durumunda denklemin Bernoulli denklemine dönüştüğü açıktır ($\alpha = 2$). Bu nedenle, *Riccati denkleminde* $q(x) \neq 0$ *kabul edilir. Riccati denkleminin genel şekilde çözümünün olmadığı kanıtlanmıştır.* Ancak, denklemin herhangi özel çözümü $(y_1(x))$ belli ise, o zaman $y = y_1(x) + z(x)$ yerine koyması, sözü edilen denklemi, yeni $z(x)$ bilinmeyenine göre

$$z' + [p(x) - 2f(x)y_1(x)]z = f(x)z^2$$

şeklinde Bernoulli denklemine, $y = y_1(x) + 1/z(x)$ yerine koyması ise

$$z' - [p(x) - 2f(x)y_1(x)]z = f(x)$$

şeklinde doğrusal denkleme dönüştürür.

---

**ÖRNEK 11** $y' - \frac{3}{x}y - \frac{4}{x^2} = y^2$ denklemini çözün.

○ $y_1 = -\frac{2}{x}$ fonksiyonunun verilen denklemin bir özel çözümü olduğu kolaylıkla denetlenebilir. Bu nedenle, $y(x) = -\frac{2}{x} + z(x)$ yerine koymasını yaparsak $\left(y' = \frac{2}{x^2} + z'\right)$,

$$z' + \frac{1}{x}z = z^2$$

Bernoulli denklemini elde ederiz. $z = uv$ kabul edip bu denklemi çözelim:

$$u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}v\right) = u^2v^2$$

$$v' + \frac{1}{x}v = 0 \Rightarrow v = \frac{1}{x}$$

$$u'\frac{1}{x} = u^2\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow u = -\frac{1}{\ln C|x|}$$

$$z = uv \Rightarrow z = -\frac{1}{x\ln C|x|}$$

Bulunan $z$ 'yi yerine koymada göz önüne aldığımızda, verilen Riccati denkleminin genel çözümünü,

$$y = -\frac{2}{x} - \frac{1}{x\ln C|x|}$$

olarak buluruz. ○

---

[1] Kont Jacopo Francesco Riccati (1676 – 1754) – İtalyan matematikçi.

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 2.6 için)

**1.** Genel çözüm formülünün yardımıyla aşağıdaki doğrusal denklemleri çözün.

(a) $y' - y\sin x = \sin x \cos x$

(b) $y' - \frac{1}{x}y = x$

(c) $y' - ay = e^{mx}$

(d) $y' - \frac{y}{2(x+1)} = (x+1)^2$

(e) $y' + \frac{a}{x}y = b$

(f) $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$

(g) $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$

(h) $y' = \frac{1}{2x - y^2}$

(i) $y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$

**2.** Aşağıdaki denklemleri çözün.

(a) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{\sin x}{x^2}$

(b) $y' + \frac{2x+1}{x}y = e^{-2x}$

(c) $y' + \frac{n}{x}y = \frac{a}{x}$

(d) $y' - \frac{n}{x}y = e^x x^n$

(e) $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

(f) $y' - \frac{2x^2 - 1}{x(1-x^2)}y = \frac{ax^2}{1-x^2}$

(g) $x(y' - y) = (1 + x^2)e^x$

(h) $y' - \frac{y}{\sin x} = \cos^2 x \ln\tan\frac{x}{2}$

(i) $(y^4 + 2x)y' = y$

(j) $(x + x^2y^2)y' + y = 0$

(k) $(e^{-ay} - bx)y' = 1$

(l) $y' = \frac{y}{2x + ay^3 - e^{by}}$

**3.** Aşağıdaki Cauchy problemlerini çözün.

(a) $y' + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $y(0) = 0$

(b) $y'\sin x - y\cos x = 1$, $y(\pi/2) = 0$

(c) $(y^2 + 2y + x^2)y' + 2x = 0$, $y(1) = 0$

(d) $xy' + y - e^x = 0$, $y(a) = b$

(e) $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x,\ y(1) = 0$

(f) $t(1+t^2)dx + (x + xt^2 - t^2)dt = 0,\ x(1) = \dfrac{\pi}{4}$

4. Doğrusal denklemin çözümü için Cauchy formülünün,

$$y = y_0 \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi\right) + \int_{x_0}^{x} f(\xi)\exp\left(-\int_{\xi}^{x} p(t)dt\right)d\xi$$

şekline dönüştürülebilirliğini gösterin.

5. $y_1(x)$ ve $y_2(x)$, doğrusal denklemin herhangi iki özel çözümü ise,

(a) $y(x) = y_1 + C(y_2 - y_1)$'in sözü edilen denklemin genel çözümü olduğunu;

(b) $y_1(x) - y_2(x)$'in uygun türdeş denklemin çözümü olduğunu;

(c) $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$'in sözü edilen denklemin çözümü olması için, $\alpha$ ve $\beta$ arasında $\alpha + \beta = 1$ ilişkisinin varlığını;

(d) $y_3(x)$, herhangi üçüncü özel çözüm ise ($y_1(x)$ ve $y_2(x)$'den farklı), $\dfrac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = sabit$ olduğunu gösterin.

6. Teğetinin apsis ekseninden ayırdığı parça teğet noktasının ordinatının karesine eşit olan eğri ailesinin denklemini yazın.

7. Teğetinin ordinat ekseninden ayırdığı parça teğet noktasının ordinatının iki katına eşit olan eğri ailesinin denklemini yazın.

8. Aşağıdaki Bernoulli denklemlerini çözün.

(a) $y' + y = y^3$

(b) $xy' + y = y^2 \ln x$

(c) $y' + \dfrac{1}{x}y = x^3y^2$

(d) $y' + y = xy^{-1}$

(e) $y' - y\tan x + y^2\cos x = 0$

(f) $3y^2y' + y^3 + x = 0$

(g) $3y' + y = (1-2x)y^4$

(h) $y' + \dfrac{2}{x}y + x^9y^5 = 0$

(i) $y' + xy = xy^{-1}$

(j) $xy' - \dfrac{1}{2\ln x}y = y^2$

9. $(x, y)$ noktasındaki normalinin apsis ekseninden ayırdığı parça $\dfrac{y^2}{x}$'e eşit olan eğri ailesinin denklemini bulun.

**10.** $(x, y)$ noktasındaki normalinin ordinat ekseninden ayırdığı parça $\frac{x^2}{y}$'ye eşit olan eğri ailesinin denklemini bulun.

**11.** Bir özel çözümü $(y_1(x))$ belli olan aşağıdaki Riccati denklemlerini çözün.

(a) $y' + \frac{2}{x^2} = y^2,\ y_1 = \frac{1}{x}$ (b) $y' - x^2 - 1 = -y^2,\ y_1 = x$

(c) $y' + xy + x = y^2,\ y_1 = x + 1$

## 2.7* DARBOUX DENKLEMİ

**Tanım** $M(x, y)$ ve $N(x, y)$ fonksiyonları $k$ mertebeden, $P(x, y)$ fonksiyonu ise $l$ $(l \neq k - 1)$ mertebeden türdeş fonksiyonlar olduğunda,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy + P(x, y)(xdy - ydx) = 0 \tag{1}$$

denklemine *Darboux*[1] *denklemi* denir $(k, l \in R)$.

Burada $M(x, y)$, $N(x, y)$ ve $P(x, y)$ katsayıları, herhangi $D$ bölgesinde tanımlı ve gerekli koşulları sağlayan fonksiyonlardır.

$l = k - 1$ durumunda, (1) denkleminin türdeş denklem olduğu açıktır ve belli yöntemle çözülür. Bu yüzden, Darboux denklemi dendiğinde, $l \neq k - 1$ olarak kabul edilir.

Darboux denklemi,

$$y = zx \tag{2}$$

yerine koymasının yardımıyla (burada, $z = z(x)$, bilinmeyen yeni fonksiyondur), $N(x, y) \not\equiv 0$ durumunda $x(z)$ fonksiyonuna göre Bernoulli denklemine, ayrıca $l = k - 2$ için doğrusal denkleme, $N(x, y) \equiv 0$ durumunda ise değişkenleri ayrılabilir denkleme getirilir.

Söylenenleri örneklerle açıklayalım.

---

**ÖRNEK 1** Aşağıda verilen denklemleri çözün.

(a) $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + x(xdy - ydx) = 0$

(b) $x^2dx + xydy + (xdy - ydx) = 0$

---

[1] Gaston Darboux (1842 – 1917) – Fransız matematikçi.

(c) $x^2\sqrt{x^2 - y^2}\,dx + ydx - xdy = 0$

○ (a) Verilen denklem için $M(x,y) = \frac{1}{x}, N(x,y) = \frac{1}{y}, P(x,y) = x,\ k = -1,$ $l = 1$ $(l \neq k - 2)$ ve katsayı fonksiyonlarının, koordinat düzleminin $xy \neq 0$ koşulunu sağlayan tüm noktalarında sürekli fonksiyonlar olduğu açıktır. Sözü edilen noktalar kümesinde (2) yerine koymasını uygularsak,

$$\frac{dx}{x} + \frac{xdz + zdx}{zx} + x^2(xdz + zdx) - x^2zdx = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{z} + \frac{dx}{x} + x^3dz + x^2zdx - x^2zdx = 0$$

$$\frac{2}{x}dx + \left(\frac{1}{z} + x^3\right)dz = 0$$

$$\frac{dx}{dz} + \frac{1}{2z}x + \frac{1}{2}x^4 = 0$$

yani $x(z)$ fonksiyonuna göre Bernoulli denklemini elde ederiz $(p(z) = \frac{1}{2z},$ $f(z) = -\frac{1}{2}, \alpha = 4)$.

$$x = uv$$

kabul edip ($u = u(z)$ ve $v = v(z)$, yeni bilinmeyen fonksiyonlardır), elde edilen denklemi belli yöntemle çözelim (bkz. Bölüm 2.6).

$$u'v + uv' + \frac{1}{2z}uv + \frac{1}{2}u^4v^4 = 0$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{1}{2z}v\right) + \frac{1}{2}u^4v^4 = 0 \qquad (*)$$

Burada,

$$v' + \frac{1}{2z}v = 0$$

kabul edersek,

$$\frac{dv}{v} + \frac{dz}{2z} = 0$$

ve sonuçta

$$v = \frac{1}{\sqrt{z}}$$

elde ederiz. Bulunan $v$ 'yi (*)'da göz önüne aldığımızda,

$$\frac{u'}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2}u^4 \frac{1}{z^2} = 0$$

yani,

$$\frac{du}{u^4} + \frac{1}{2}\frac{dz}{z^{3/2}} = 0$$

olur. Her iki tarafın integralini alırsak,

$$-\frac{1}{3}u^{-3} - z^{-1/2} + C = 0$$

ve sonuçta ise

$$u = \frac{\sqrt[6]{z}}{\sqrt[3]{3(C\sqrt{z} - 1)}}$$

elde ederiz. Bulunan $u(z)$ ve $v(z)$'yi yerine koymada yazarsak,

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{3z(C\sqrt{z} - 1)}}$$

buluruz. Burada, $z = \dfrac{y}{x}$ olduğunu göz önüne alıp sadeleştirme yaptığımızda,

$$x^3 = \frac{1}{3C\left(\dfrac{y}{x}\right)^{3/2} - 3\dfrac{y}{x}}$$

$$3x^{3/2} = \frac{1}{Cy^{3/2} - x^{1/2}y}$$

ve sonuçta ele alınan denklemin

$$3x^2y - 3C(xy)^{3/2} + 1 = 0$$

genel integralini elde ederiz;

**(b)** Ele alınan denklem için $M(x, y) = x^2$, $N(x, y) = xy$, $P(x, y) = 1$, $k = 2$, $l = 0$ $(l = k - 2)$ ve katsayı fonksiyonlarının $xOy$ düzleminde sürekli fonksiyonlar olduğu açıktır. (2) yerine koymasını uyguladığımızda,

$$x^2dx + x^2z(xdz + zdx) + x(xdz + zdx) - xzdx = 0$$

$$(x^2 + x^2z^2)dx + (x^3z + x^2)dz = 0 \quad (x \neq 0)$$

$$\frac{dx}{dz} + \frac{z}{1 + z^2}x + \frac{1}{1 + z^2} = 0$$

yani $x(z)$ 'ye göre doğrusal denklem elde ederiz. Buradan, doğrusal denklemin çözüm formülüne göre (bkz. Bölüm 2.6),

$$x = e^{-\int \frac{z}{1+z^2}dz}\left(C - \int \frac{1}{1+z^2} e^{\int \frac{z}{1+z^2}dz} dz\right)$$

yazıp gerekli işlemleri yaparsak,

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\left[C - \ln(z + \sqrt{1+z^2})\right]$$

buluruz (hesaplamada, $\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \ln(z + \sqrt{1+z^2}) + C_1$ formülünü kullandık, bkz. 1, Bölüm 5.2). Burada, $z = \frac{y}{x}$ olduğunu göz önüne alırsak,

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\left\{C - \ln\left[\frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right]\right\}$$

olur. Sonuçta, verilen denklemin, $x < 0$ için

$$\ln\frac{y - \sqrt{x^2+y^2}}{x} - \sqrt{x^2+y^2} = C$$

$x > 0$ içinse,

$$\sqrt{x^2+y^2} + \ln\frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x} = C$$

genel çözümünü (integralini) buluruz;

(c) Verilen denklem için $M(x,y) = x^2\sqrt{x^2-y^2}, N(x,y) \equiv 0, \quad P(x,y) = -1$ olduğu açıktır. (2) yerine koymasını uyguladığımızda,

$$x^2\sqrt{x^2(1-z^2)}dx + zxdx - x(xdz + zdx) = 0$$

$$x\sqrt{1-z^2}dx - dz = 0$$

yani, değişkenleri ayrılabilir denklem elde ederiz. Bu denklemin çözümü,

$$\frac{x^2}{2} - \arcsin z = C \qquad \text{veya} \qquad z = \sin\left(\frac{x^2}{2} - C\right)$$

şeklinde bulunur. $z = \frac{y}{x}$ olduğunu göz önüne aldığımızda, ele alınan denklemin,

$$y = x \sin\left(\frac{x^2}{2} - C\right)$$

genel çözümünü buluruz. ○

---

**ALIŞTIRMALAR (Bölüm 2.7 için)**

1. Aşağıdaki diferansiyel denklemleri çözün.

(a) $dx - dy + y(xdy - ydx) = 0$

(b) $dx + dy + (xdy - ydx) = 0$

(c) $dx - dy + (xdy - ydx) = 0$

(d) $xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0$

(e) $\dfrac{dx}{\sqrt{y}} + \dfrac{dy}{\sqrt{x}} + x(xdy - ydx) = 0$

(f) $dx + dy + \sqrt{x}(xdy - ydx) = 0$

(g) $(x^2 + 2y^2)dx - xydy - (xdy - ydx) = 0$

(h) $(x^2 + xy)dx - x^2dy + xdy - ydx = 0$

(i) $x^3dx + x^2ydy + (xdy - ydx) = 0$

(j) $(x^2 + xy)dx + y(xdy - ydx) = 0$

## 2.8 TAM DİFERANSİYEL DENKLEM. İNTEGRAL ÇARPANI

### 2.8.1 Tam Diferansiyel Denklem

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $M(x, y)$ ve $N(x, y)$, herhangi $D$ bölgesinde gerekli koşulları sağlayan fonksiyonlardır.

**Tanım 1** (1) denkleminin sol tarafı $D$ bölgesinde bir $U(x, y)$ fonksiyonunun tam diferansiyeli ise, yani,

$$dU = M(x, y)dx + N(x, y)dy \tag{2}$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir $U(x, y)$ fonksiyonu varsa, o zaman denkleme *tam diferansiyel denklem* denir.

(1), tam diferansiyel denklem ise, tanıma göre onu

$$dU(x, y) = 0 \tag{3}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan,

$$U(x, y) = C \tag{4}$$

genel integrali bulunur.

Şimdi, denklemin tam diferansiyel olma koşulunu ve $U(x, y)$ fonksiyonunun bulunma yöntemini açıklayan aşağıdaki teoremi verelim.

**TEOREM** $M(x, y)$ ve $N(x, y)$, herhangi $D$ bölgesinde sürekli ve 1. mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar olduğunda, (1) denkleminin tam diferansiyel denklem olması için, sözü edilen bölgede

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{5}$$

eşitliğinin sağlanması gerekli ve yeterlidir.

**Gereklik** (1) denkleminin $D$'de tam diferansiyel denklem olduğunu, yani (2) eşitliğinin sağlandığını kabul edip (5) koşulunu doğrulayalım. Bunun için, tam diferansiyelin belli olan

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

ifadesini yazıp (bkz. 2, Bölüm 11.4), (2) eşitliğiyle kıyasladığımızda,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y), \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y) \tag{6}$$

olduğunu görüyoruz. Birinci eşitliğin her iki tarafının $y$'ye, ikinci eşitliğin de her iki tarafının $x$'e göre türevini alırsak,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olur. Burada Schwarz teoremini, yani, $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ ifadesini kullandığımızda (bkz. 2, Bölüm 11.6), $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ $(\forall (x, y) \in D)$ elde ederiz.

**Yeterlik** $D$ bölgesinde (5) eşitliğinin sağlandığını varsayıp (2) eşitliğini sağlayacak $u(x, y)$ fonksiyonunun varlığını gösterelim. Bunun için, (6) eşitliklerinden birincisinin her iki tarafının $[x_0, x]$ aralığında $x$'e göre integralini alırsak,

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \varphi(y) \tag{7}$$

olur (burada, $\varphi(y) = U(x_0, y)$ kabul edilmiştir), $\varphi(y)$'yi belirlemek için, (7) eşitliğinin her iki tarafının $y$'ye göre türevini alıp (5) koşulunu ve (6) eşitliklerinden ikincisini kullanırsak,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} dx + \varphi'(y)$$

$$N(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} dx + \varphi'(y)$$

$$N(x,y) = N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y)$$

$$\varphi'(y) = N(x_0,y)$$

olur. Son eşitliğin her iki tarafının $[y_0, y]$ aralığında $y$'ye göre integralini alırsak,

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + C_1$$

olur (burada, $\varphi(y_0) = C_1$ kabul ettik). Bulunan $\varphi(y)$'yi (7) eşitliğinde yazıp, aranan $U(x,y)$ fonksiyonunu,

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + C_1 \tag{8}$$

olarak buluruz. Bu tür belirlenen $U(x,y)$ fonksiyonunun (2) eşitliğini sağladığı kolaylıkla denetlenebilir. ❑

Doğruladığımız teorem, aynı zamanda $U(x,y)$ fonksiyonunun bulunma yöntemini de göstermektedir ((8) formülü). Bulunan $U(x,y)$ fonksiyonu, (4) eşitliğinde yazıldığında, (1) denkleminin genel çözümü (integrali)

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C \tag{9}$$

olarak bulunur (burada, $(x_0, y_0)$, $D$ bölgesinin herhangi sabit, $(x,y)$ ise keyfi bir noktasıdır. $(x_0, y_0)$'ın seçiminin sonucu etkilemediği kolaylıkla denetlenebilir. Bu nedenle, örnek çözümünde $(x_0, y_0)$ olarak, $D$ bölgesinin hesaplamayı kolaylaştıracak bir noktası alınır.

**ÖRNEK 1** $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$ denklemini çözün.

○ $M(x,y) = \frac{2x}{y^3}$, $N(x,y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$ ve $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}$, yani verilen denkleminin tam diferansiyel denklem olduğu açıktır ($y \neq 0$). Basitlik için, $(x_0, y_0)$ yerine (0, 1) noktasını alıp doğrudan (9) formülünü kullanırsak, çözümü

$$\int_0^x \frac{2x}{y^3}dx + \int_1^y \frac{y^2}{y^4}dy = C$$

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$$

olarak buluruz. ○

## 2.8.2 İntegral Çarpanı

Şimdi, (1) denkleminin tam diferansiyel denklem olmadığını varsayıp $\left(\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}\right)$, sözü edilen denklem tam diferansiyel denklem şekline dönüştürülebilir mi sorusuna açıklık getirelim. Bunun için (1) denkleminin her iki tarafını bir $\mu(x,y)$ fonksiyonuyla çarpıp, denklemi

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \tag{10}$$

şeklinde yazalım. $\mu(x,y)$ çarpanını (10) denklemi tam diferansiyel denklem olacak, yani

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \tag{11}$$

eşitliği sağlanacak şekilde seçelim. $\mu(x,y)$ fonksiyonuna (1) denkleminin *integral çarpanı* denir. (11) denklemi $\mu(x,y)$ 'ye göre kısmi türevli denklem olduğundan, bunun genel şekilde çözümü olanaksızdır. Bu yüzden integral çarpanı, çeşitli yöntemlerle farklı özel biçimlerde aranır. Bunlardan birkaçını inceleyelim.

**1.** $\mu(x,y) = x^r y^s$ $(r, s \in R)$ **biçimi.** $r$ ve $s$ sayıları, denkleme bağlı olarak bulunur. Bunun için, $\mu(x,y)$, $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ 'nin somut ifadeleri (9) eşitliğinde yazılır ve $r, s$ sayıları, elde edilen eşitlik sağlanacak şekilde belirlenir.

**ÖRNEK 2** $\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0$ denklemini integral çarpanı yöntemiyle çözün.

○ $M(x,y)=\frac{y}{x}$, $N(x,y)=y^3-\ln x$, $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{1}{x}$, $\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{x}$ ve $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğu açıktır. $M(x,y)$ ve $N(x,y)$'nin ifadelerini, hem de $\mu(x,y)=x^r y^s$'i (11) eşitliğinde yazalım:

$$\frac{\partial(x^{r-1}y^{s+1})}{\partial y}=\frac{\partial[x^r y^s(y^3-\ln x)]}{\partial x}$$

$$(s+1)x^{r-1}y^s=rx^{r-1}y^s(y^3-\ln x)-x^{r-1}y^s$$

Son eşitliğin $x$ ve $y$'nin tanım bölgesindeki tüm değerlerinde sağlanması için, $s+1=-1$ ($x^{r-1}y^s$'in katsayıları) ve $r=0$ (sol tarafta $x^{r-1}y^s(y^3-\ln x)$'in benzeri olmadığından) olması gerekir. Böylece, $s=-2$, $r=0$ olur ve integral çarpanı, $\mu=y^{-2}$ olarak belirlenir.

Gerçekten, ele alınan denklemin her iki tarafını $y^{-2}$ ile çarptığımızda, elde edilen

$$\frac{1}{xy}dx+\left(y-\frac{\ln x}{y^2}\right)dy=0$$

denklemi için,

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{xy}\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(y-\frac{\ln x}{y^2}\right)}{\partial x}\quad\text{yani}\quad -\frac{1}{xy^2}=-\frac{1}{xy^2}$$

eşitliği sağlanır. Yani tam diferansiyel denklemdir. Şimdi denklemi çözelim. $(x_0,y_0)$ yerine (1, 1) noktasını alırsak, (9) formülüne göre,

$$\int_1^x\frac{dx}{xy}+\int_1^y ydy=C_1\quad\text{yani}\quad\frac{1}{y}\ln x+\frac{y^2}{2}=C\quad\left(C=C_1-\frac{1}{2}\right)$$

genel integralini buluruz. ○

---

**Uyarı 1** $\mu(x,y)=x^r y^s$, $M(x,y)$ ve $N(x,y)$'nin ifadeleri (10) eşitliğinde yazıldığında, elde edilen denklem $r$ ve $s$'ye göre çözülemez olabilir. Bu durumda, $x^r y^s$ şeklinde integral çarpanı yoktur. Örneğin,

$$(x+y)dx-(x+1)dy=0$$

denklemi için, integral çarpanını $\mu=x^r y^s$ şeklinde aradığımızda, (11) eşitliği

$$(x^{r+1}y^s+x^r y^{s+1})'_y=-(x^{r+1}y^s+x^r y^s)'_x$$

yani,

$$sx^{r+1}y^{s-1} + (s+1)x^r y^s = -(r+1)x^r y^s - rx^{r-1}y^s$$

biçimini alır. Benzer terimlerin katsayılarını karşılaştırdığımızda, buradan, $r$ ve $s$ 'ye göre,

$$\begin{cases} s = 0 \\ r = 0 \\ s + 1 = -(r+1) \end{cases}$$

uyumsuz, daha doğrusu sıfırdan farklı çözümü olmayan sistemini elde ederiz. Demek ki, verilen denklemin $\mu(x, y) = x^r y^s$ biçiminde integral çarpanı yoktur.

Şimdi, $x^r y^s$ biçiminde integral çarpanının olmadığı durumu inceleyelim. Bunun için (11) eşitliğini aşağıdaki şekilde dönüştürelim:

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y} - N\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$$\frac{M}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial y} - \frac{N}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$M\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} - N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \tag{12}$$

Görüldüğü gibi, (12) denklemi, $\ln\mu(x, y)$ 'ye göre birinci mertebeden kısmi türevli denklemdir ve bunun her çözümü integral çarpanı olarak kabul edilebilir. Ancak, (12) denkleminin genel şekilde çözümü (1) denkleminin çözümünden daha zordur. Bu nedenle, $\mu(x, y)$ integral çarpanı için bazı özel durumları inceleyelim. Bu durumlarda, integral çarpanının tek değişkene bağlılığı istenmektedir: $\mu = \mu(z)$. Burada $z$ değişkeni, $x$, $y$, $xy$, $x + y$, $x - y$, $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$ vb. olarak kabul edilebilir.

**2. $\mu = \mu(z)$ biçimi.** Burada, $z$ değişkeni, $x$ ve $y$ 'ye bağlı bir fonksiyondur. Bu durumda (12) denklemi,

$$\frac{d\ln\mu}{dz} = \frac{1}{Mz'_y - Nz'_x}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \tag{13}$$

şeklinde yazılabilir (bileşik fonksiyonun türev formülüne göre,

$$\frac{\partial\ln\mu}{\partial x} = \frac{d\ln\mu}{dz}z'_x, \quad \frac{\partial\ln\mu}{\partial y} = \frac{d\ln\mu}{dz}z'_y$$

olduğundan). Açıktır ki, (13) denkleminin sağ tarafında işlemler yapıldıktan sonra, sonuç yalnız $z$ 'ye bağlı olduğunda denklemin çözümü vardır.

Şimdi, söylenenleri $z$ 'nin bazı somut durumları için inceleyelim.

**(a)** $\mu = \mu(x)$ **yani,** $z = x$ **biçimi.** Bu durumda, $z'_x = 1, z'_y = 0$ olur ve (13) denklemi

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

şeklini alır. Açıktır ki, sağ taraf yalnız $x$ 'e bağlı olduğunda, elde edilen denklemin çözümü vardır ve

$$\mu(x) = e^{\int \phi(x)dx} \tag{14}$$

şeklindedir. Yani bu durumda, integral çarpanı (14) formülüyle belirlenir (intergral çarpanı bulunurken, bunun bir tane şekli arandığından, integral sabiti $C = 0$ kabul edilebilir). Burada,

$$\phi(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \tag{15}$$

ile gösterilmektedir.

**Uyarı 2** $y' + p(x)y = f(x)$ doğrusal denklemini $[p(x)y - f(x)]dx + dy = 0$ şeklinde yazdığımızda $(M(x, y) = p(x)y - f(x),\ N(x, y) = 1)$,

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = p(x)$$

olduğunu görüyoruz. Bu nedenle, (14) formülüne göre, doğrusal denklemin integral çarpanı için,

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

biçimi elde edilir (bkz. Bölüm 2.6).

**(b)** $\mu = \mu(y)$ **yani,** $z = y$ **biçimi.** Bu durumda, $z'_x = 0, z'_y = 1$ olur ve (13) denklemi

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \tag{16}$$

şeklini alır. Açıktır ki, sağ taraf yalnız $y$ 'ye bağlı olduğunda, elde edilen denklemin çözümü vardır ve

$$\mu(y) = e^{\int \psi(y)dy} \tag{17}$$

şeklindedir. Yani bu durumda, integral çarpanı (16) formülüyle belirlenir. Burada,

$$\psi(y) = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \tag{18}$$

ile gösterilmektedir.

---

**ÖRNEK 3** $(x + y)dx - (x + 1)dy = 0,\ y(0) = 3$ problemini çözün.

○ $M(x,y) = x + y,\ N(x,y) = -(x+1)$ ve denklemin tam diferansiyel olmadığı açıktır. İntegral çarpanının şeklini belirlemek için, önce (15) eşitliğini deneyelim:

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = -\frac{1}{x+1}(1+1) = -\frac{2}{x+1} = \phi(x)$$

Demek ki, $\mu = \mu(x)$ şeklinde integral çarpanı vardır ve (14) formülüyle bulunabilir.

$$\mu(x) = \exp\left(-\int \frac{2}{x+1}dx\right) = \exp\left(\ln(x+1)^{-2}\right) = \frac{1}{(1+x)^2} \qquad \text{yani}$$

$$\mu(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Denklemin her iki tarafını $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ ile çarparsak,

$$\frac{x+y}{(1+x)^2}dx - \frac{1}{1+x}dy = 0$$

tam diferansiyel denklemini elde ederiz. Önce bunun genel çözümünü bulalım. $(x_0, y_0)$ yerine $(0, 0)$ noktasını alıp (9) formülüne göre,

$$\int_0^x \frac{x+y}{(x+1)^2}dx - \int_0^y dy = C$$

$$\int_0^x \left[\frac{1}{1+x} + \frac{y-1}{(1+x)^2}\right]dx - y = C$$

$$\ln|1+x| - \frac{y-1}{1+x} - y = C.$$

buluruz. Başlangıç koşuluna göre buradan $C = -5$ olarak bulunur ve aranan çözüm

$$\ln|1+x| + \frac{1-y}{x+1} - y + 5 = 0$$

olur. ○

---

(c) $\mu = \mu(xy)$ **yani,** $z = xy$ **biçimi.** Bu durumda $z'_x = y, z'_y = x$ olur ve (13) denklemi,

$$\frac{d \ln \mu}{dz} = \frac{1}{xM - yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \tag{19}$$

şeklini alır, bu denkleminse sağ taraf yalnız $xy$ çarpımına bağlı bir fonksiyon olduğunda çözümü vardır.

---

**ÖRNEK 4** $x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0$ denklemini çözün.

○ Önce denklemi, (1) şeklinde yazalım:

$$(x^2y^3 + y)dx + (x^3y^2 - x)dy = 0$$

Açık ki, $M(x,y) = x^2y^3 + y$, $N(x,y) = x^3y^2 - x$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2y^2 + 1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2y^2 - 1$ 'dir ve denklem tam diferansiyel değildir.

İntegral çarpanının şeklini belirlemek için, katsayılarda $xy$ çarpımının bulunduğunu ve $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = -2$ olduğunu göz önüne alıp, önce, (19) eşitliğinin sağ tarafının yalnız $xy$ çarpımına bağlı olup olmadığına bakalım. $xM - yN = x^3y^3 + xy - x^3y^3 + xy = 2xy$ olduğundan,

$$\frac{1}{xM - yN}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{1}{2xy} \cdot (-2) = -\frac{1}{xy}$$

olur. Yani, integral çarpanını $\mu = \mu(xy)$ şeklinde arayabiliriz. O zaman, (19) formülüne göre,

$$\frac{d \ln \mu}{dz} = -\frac{1}{xy} \qquad \text{yani} \qquad \frac{d \ln \mu}{dz} = -\frac{1}{z}$$

yazılabilir. Buradan, $\mu = z^{-1}$ yani $\mu = \frac{1}{xy}$ olarak bulunur.

Denklemin her iki tarafını $\frac{1}{xy}$ ile çarpıp, elde edilen

$$\left(xy^2 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x^2y - \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

tam diferansiyel denklemini (9) formülüyle çözelim ($(x_0, y_0)$ yerine (1, 1) noktasını alalım):

$$\int_1^x \left( xy^2 + \frac{1}{x} \right) dx + \int_1^y \left( y - \frac{1}{y} \right) dy = C$$

$$\frac{x^2y^2}{2} + \ln|x| + \frac{y^2}{2} - \ln|y| + 1 = C \quad \text{veya} \quad (x^2+1)y^2 + \ln\left(\frac{x}{y}\right)^2 = C \qquad \bigcirc$$

---

Benzer yolla, $z$ 'nin, $x+y$, $x-y$, $x^2+y^2$, $x^2-y^2$, $x^2-y$ vb. olarak kabul edildiği durumlar da incelenebilir.

---

**ÖRNEK 5** $(\sqrt{x^2-y} + 2x)dx - dy = 0$ denklemini çözün.

○ Denklemin $\sqrt{x^2-y}$ biçiminde ifade içerdiğini göz önünde bulundurup önce $\mu = \mu(x^2-y)$ şeklinde $(z = x^2 - y)$ integral çarpanının varlığını inceleyelim.

$$M(x,y) = \sqrt{x^2-y} + 2x, \quad N(x,y) = -1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{2\sqrt{x^2-y}},$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 0, \quad z = x^2 - y, \quad z'_x = 2x, \quad z'_y = -1$$

olduğunu (13) eşitliğinin sağ tarafında göz önüne alırsak,

$$\frac{1}{Mz'_y - Nz'_x}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-y}}}{(\sqrt{x^2-y}+2x)(-1) - (-1)\cdot 2x}$$

$$= -\frac{1}{2(x^2-y)} = -\frac{1}{2z}$$

olduğunu görüyoruz. Demek ki, integral çarpanı $\mu = \mu(x^2-y)$ şeklinde aranabilir ve (12) eşitliğine göre,

$$\frac{d\ln\mu}{dz} = -\frac{1}{2z}$$

$$\ln\mu = -\frac{1}{2}\ln z$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{z}} \quad \text{yani} \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{x^2-y}}$$

olarak bulunur.

Verilen denklemin her iki tarafını $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y}}$ ile çarpıp (9) formülüne göre genel integralini bulalım ($(x_0, y_0)$ yerine (1, 0) noktasını alalım):

$$\left(1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 - y}}\right)dx - \frac{1}{\sqrt{x^2 - y}}dy = 0$$

$$\int_1^x \left(1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 - y}}\right)dx - \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1 - y}}dy = C$$

$$\left(x + 2\sqrt{x^2 - y}\right)\Big|_1^x + 2\sqrt{1 - y}\Big|_0^y = C$$

$$x + 2\sqrt{x^2 - y} = C$$

O

---

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 2.8 için)

1. $M(x)dx + N(y)dy = 0$ değişkenlerine ayrılmış denkleminin tam diferansiyel denklem olduğunu gösterin.
2. Tam diferansiyel denklemin çözümü için (9) formülünde, $(x_0, y_0)$ noktasının seçiminin önemli olmadığını gösterin (katsayılarının tanım bölgesinde).
3. $(\sin x + ye^{\alpha xy})dx + (\cos x + mxe^{\alpha xy})dy = 0$ denklemini tam diferansiyel denklem yapan $m$ sayısını bulun ve denklemi çözün.
4. $(y^4 + 2mxy + 2x)dx + (4xy^3 + mx^2 + 4y - 3)dy = 0$ denklemini tam diferansiyel denklem yapan $m$ sayısını bulun ve denklemi çözün.
5. $(x^2 + xy^2 \sin x)dx + (\cos x + \varphi(x)y)dy = 0$ denklemini tam diferansiyel denklem yapan $\varphi(x)$ fonksiyonunu bulun ve denklemi çözün.
6. Aşağıdaki tam diferansiyel denklemleri çözün.

   **(a)** $(1 + xy^2)dx + (1 + x^2y)dy = 0$

   **(b)** $(x^2 + y)dx + (x - 2y^3)dy = 0$

   **(c)** $(\sin x + y)dx + (x + \cos y)dy = 0$

   **(d)** $(x \sin y + \cos x)dx + \left(\frac{1}{2}x^2 \cos y + y^2\right)dy = 0$

   **(e)** $(e^{x+y} + \cos^2 x)dx + (e^{x+y} + \sin 2y)dy = 0$

(f) $xdx + ydy = \dfrac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}$

(g) $(xy \sin xy - \cos xy + x^2 + 1)dx + (x^2 \sin xy - e^y + 3y)dy = 0$

(h) $(1 + e^{x/y})dx + e^{x/y}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$

7. Aşağıdaki Cauchy problemlerini çözün.

(a) $(x^2 + 2x\cos y + 3x^2y)dx + (x^3 - x^2 \sin y + e^y)dy = 0,\ y(0) = 3$

(b) $(\sin x + x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y + \cos y)dy = 0,\ y(0) = 0$

(c) $(16x^3y^3 + 3x^2 - 6x)dx + (12x^4y^2 - 2y + 10)dy = 0,\ y(1) = 2$

(d) $(2x + 1 + y\cos xy)dx + (x\cos xy + 3y^2 - 2)dy = 0,\ y(0) = 1$

8. İntegral çarpanını $\mu = x^r y^s$ şeklinde arayıp aşağıdaki denklemleri çözün.

(a) $(x^2y^2 + 1)dx + 2x^3ydy = 0$

(b) $x^2ydx + (x^3 + y^3)dy = 0$

(c) $(x^3 - y^3)dx + 3xy^2dy = 0$

(d) $3xydx + (x^2 - y^2 + 3y)dy = 0$

(e) $(x^4y^5 - 5y)dx + (x^5y^4 + 3x)dy = 0$

(f) $(xy^2 + 3y\sin x)dx + (x^2y - 4x\cos y)dy = 0$

9. İntegral çarpanını $\mu = \mu(x)$ veya $\mu = \mu(y)$ şeklinde arayıp aşağıdaki denklemleri çözün.

(a) $(x^2 + y)dx - xdy = 0$

(b) $y(1 + xy)dx - xdy = 0$

(c) $(2xy^2 - y)dx + (x + y + y^2)dy = 0$

(d) $(xy^2 + y)dx - xdy = 0$

(e) $(x\sin y + y\cos y)dx + (x\cos y - y\sin y)dy = 0$

10. İntegral çarpanını $\mu = \mu(x + y)$, $\mu = \mu(xy)$, $\mu = \mu(x^2 - y^2)$ veya $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ şeklinde arayıp aşağıdaki denklemleri çözün.

(a) $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0$

(b) $(x^3y^4 - 3y)dx + (x^4y^3 + 3x)dy = 0$

(c) $x(1 - y)dx + (x^2 + y)dy = 0$

(d) $\left[2y + \dfrac{1}{(x+y)^2}\right]dx + \left[x + 3y + \dfrac{1}{(x+y)^2}\right]dy = 0$

## 2.9 TEKİL NOKTA VE TEKİL ÇÖZÜM

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Burada $f(x, y)$, $xOy$ düzleminin herhangi açık $D$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyondur. $\forall M_0(x_0, y_0) \in D$ olsun.

$M_0(x_0, y_0) \in D$ noktasının herhangi civarında (1)-(2) problemi için varlık ve teklik teoreminin koşulları sağlandığında, bu noktaya (1) denkleminin *basit noktası* denir. Basit olmayan nokta *tekil nokta* diye, tekil noktalardan oluşan çizgi ise *tekil çizgi* diye adlandırılır. Örneğin, $y' = xy^{1/3}$ denklemi için, $y \neq 0$ olmak üzere, düzlemin keyfi $(x, y)$ noktası basit, $(x, 0)$ noktası ise tekil noktadır ($(x, 0)$ noktasında $f(x, y) = xy^{1/3}$ fonksiyonunun $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ kısmi türevi olmadığından). Ayrıca, $y = 0$ doğrusu da denklemin tekil çizgisidir.

Tanıma göre, tekil noktada varlık ve teklik teoreminin koşulları sağlanmadığından, bu noktada çözüm olmayabilir, bir tane olabilir, çok sayıda olabilir, ya da sonsuz sayıda olabilir. Çözümün varolduğu tekil noktaların ilgi çektiği açıktır.

Birinci mertebeden denklemin çözümü olan integral eğrisinin her noktasından, başka bir (veya birkaç) integral eğrisi geçiyorsa, o zaman sözü edilen çözüme *tekil çözüm*[1] denir.

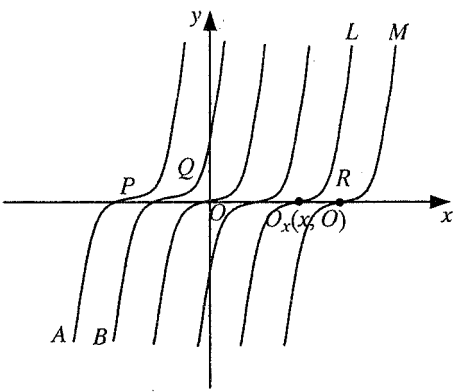
---

**ÖRNEK 1** $y' = 3y^{2/3}$ denkleminin çözümünü inceleyin.

○ Görüldüğü gibi, $y \neq 0$ koşulunu sağlayan bütün $(x, y)$ noktaları ele alınan denklemin basit, her $(x, 0)$ noktası ise tekil noktalarıdır, $y = 0$ doğrusu da

---

[1] Tekil çözüm (türeve göre çözülmemiş denklemler de dahil, Bölüm 2.10'a bakınız), denklemi sağlayan, ancak genel çözümden elde edilemeyen çözüm olarak da tanımlanabilir. Örneğin, $(y')^2 = 4y$ denkleminin $y = 0$ açık çözümü, denklemin $y = (C \pm x)^2$ genel çözümünden $C$ sabitinin hiçbir değerinde elde edilemediğinden tekil çözümdür.




**ŞEKİL 14**

denklemin bir çözümüdür (integral eğrisidir). Öte yandan, ele alınan denklemin genel çözümünün

$$y = (x + C)^3$$

olduğu açıktır (Şekil 14). $x$ ekseninin, yani $y = 0$ doğrusunun her $(C, 0)$ noktasından, $y = 0$ doğrusunun (çözümünün) dışında, bir tane de $y = (x + C)^3$ eğrisi geçtiğinden, yukarıdaki tanımdan dolayı, $y = 0$, ele alınan denklemin tekil çözümüdür.

Şekil 14'ten görüldüğü gibi, $y = 0$ tekil integral eğrisinin (çözümün) her $O_x(x, 0)$ noktasından, $y = (x + C)^3$ eğri ailesinin ve $y = 0$ doğrusunun parçalarından oluşan sonsuz sayıda çözüm eğrisi geçer. Örneğin, $APO_xL$, $APRM$, $BQO_xL$, $BQRM$ vb. çizgileri çözüm eğrileri olup hepsi $O_x(x, 0)$ noktasından geçer. ○

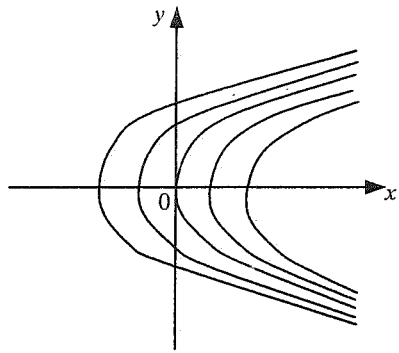
---

**Uyarı** Tekil çizgisinin her noktasından denklemin birden fazla integral eğrisi geçtiğinde, bu tekil çizgi aynı zamanda tekil çözümdür, aksi durumunda ise tekil çizgi tekil çözüm değildir. Örnek 1'de $y' = 3y^{2/3}$ yerine, $y' = 3y^{2/3} + a$ alırsak $(a \neq 0)$, $y = 0$ doğrusu, bütün noktaları tekil noktalar olduğundan tekil çizgidir, ancak tekil çözüm değildir ($y = 0$, denklemi sağlamaz).

---

**ÖRNEK 2** $y' = \dfrac{1}{y}$ denkleminin çözümünü inceleyin.

○ Görüldüğü gibi, ele alınan denklem için $y \neq 0$ koşulunu sağlayan bütün $(x, y)$ noktaları basit, her $(x, 0)$ ise tekil noktalardır. $y = 0$ doğrusu tekil çizgi, $y^2 = 2(x + C)$ 'de genel integraldir. Her $(x_0, 0)$ tekil noktasından bir tek




**ŞEKİL 15**

$$y^2 = 2(x - x_0)$$

integral eğrisinin geçtiği açıktır (Şekil 15). Demek ki tekil çizgi, yani $y = 0$ tekil çözüm değildir. ○

---

### ALIŞTIRMALAR (Bölüm 2.9 için)

**1.** Aşağıdaki denklemlerin tekil noktalarını ve tekil çözümlerini bulun (varsa).

**(a)** $y' = y^\alpha \quad (0 < \alpha < 1,\ x > 0,\ y \geq 0)$ **(b)** $y' = \dfrac{2\sqrt{y}}{x^2 + 1}$

**(c)** $y' = 2x\sqrt{y - 2}$ **(d)** $y' = \dfrac{x}{y}$

## 2.10 TÜREVE GÖRE ÇÖZÜLMEMİŞ DENKLEMLER LAGRANGE VE CLAIRAUT DENKLEMLERİ

Türeve göre çözülmemiş birinci mertebeden diferansiyel denklemlerin,

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

genel şeklini ele alıp aşağıdaki durumları inceleyelim.

### 2.10.1 (1) Denkleminin $y'$'ye göre Çözülebilir Olması

Bu durumda (1) denklemi,

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

olmak üzere tek değerli, veya

$$y' = f_i(x, y) \quad (i = \overline{1, m}, \quad 1 < m \in N) \tag{3}$$

olmak üzere çok değerli şekilde çözülebildiğinde, elde edilen denklem veya denklemlerin her çözümü onun da çözümü olur.

**ÖRNEK 1** $(y')^2 + 4xy' - 5x^2 = 0$ denklemini çözün.

○ Denklemi $y'$'ye göre çözüp,

$$y' = -5x \quad \text{ve} \quad y' = x$$

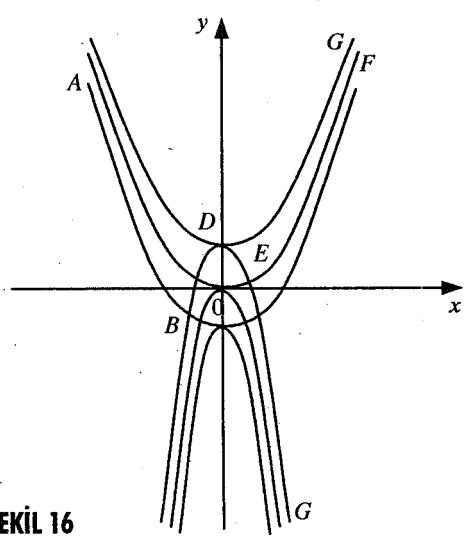
olmak üzere iki tane denklem elde ederiz. Sırasıyla bu denklemlerin

$$y = -\frac{5}{2}x^2 + C_1 \quad \text{ve} \quad y = \frac{x^2}{2} + C_2$$

çözümleri, ele alınan denklemin de çözümüdür. Üstelik, $C_1 = C_2$ durumunda, sözü edilen çözümlerin yardımıyla oluşturulan,

$$y = \begin{cases} -\frac{5}{2}x^2 + C_1, & \text{eğer } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + C_1, & \text{eğer } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad y = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C_1, & \text{eğer } x < 0 \\ -\frac{5}{2}x^2 + C_1, & \text{eğer } x \geq 0 \end{cases}$$

fonksiyonları da söz konusu denklemin çözümleridir (Şekil 16). Bunların dışında, $C_1$ ve $C_2$'nin çeşitli değerlerinde, çözüm fonksiyonlarının grafiklerinin dallarından oluşturulan, örneğin, *ABDG*, *ABDEF*, *ABDEG* vb. eğrilerinin ifade ettikleri fonksiyonlar da verilen denklemin çözümleridir (sözü edilen fonksiyonların türevinin olmadığı dal parçalarının birleşme noktaları hariç).




**ŞEKİL 16** ○

Şimdi, (1) denkleminin $y'$'ye göre çözülemediği durumları inceleyelim.

### 2.10.2 (1) Denklemi Doğrudan $x$ ve $y'$yi İçermiyor

$$F(y') = 0 \tag{4}$$

Bu durumda $y' = p$ ($p$, parametre) kabul edip (4) denklemini,

$$F(p) = 0 \tag{5}$$

şeklinde yazabiliriz. Eğer (5) denkleminin $p_1, p_2, ..., p_m$ olmak üzere $m\,(1 \le m \in N)$ sayıda gerçel kökü varsa, o zaman $y' = p_i$ denkleminden $y = p_i x + C$, buradanda,

$$p_i = \frac{y - C}{x} \quad \text{yani} \quad y' = \frac{y - C}{x}$$

buluruz $(i = 1, \overline{m})$. $y'$'nün ifadesini (4) denkleminde yazdığımızda, elde edilen

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0 \tag{6}$$

fonksiyonu, sözü edilen denklemin genel integrali olur.

Gerçekten, (6) eşitliğinin her iki tarafından $x$'e göre türev alıp elde edilen

$$F'\left(\frac{y - C}{x}\right) \cdot \left(\frac{y - C}{x}\right)'_x = 0 \quad \text{yani} \quad \frac{xy' - y + C}{x^2} = 0$$

eşitliğinden bulunan $\dfrac{y - C}{x} = y'$ ifadesini (6) eşitliğinde yazdığımızda, (4) denklemini elde ederiz.

---

**ÖRNEK 2** $(y')^5 + 4(y')^4 - 3(y')^2 + y' - 2 = 0$ denklemini çözün.

○ $y' = p$ alındığında. elde edilen

$$p^5 + 4p^4 - 3p^2 + p - 2 = 0$$

denkleminin en azından bir tane gerçel kökü vardır. Bu nedenle, (6) formülüne göre, ele alınan denklemin genel integrali

$$\left(\frac{y - C}{x}\right)^5 + 4\left(\frac{y - C}{x}\right)^4 - 3\left(\frac{y - C}{x}\right)^2 + \left(\frac{y - C}{x}\right) - 2 = 0$$

olarak yazılabilir. ○

---

### 2.10.3 (1) Denkleminin Aranan Fonksiyonu Doğrudan İçermemesi

$$F(x, y') = 0 \tag{7}$$

Bu durumda, bir $p$ parametresi ele alıp denklemi

$$\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y' = \psi(p) \end{cases} \tag{8}$$

parametrik şeklinde yazabiliriz. $dy = y'dx$ ve $dx = \varphi'(p)dp$ olduğu göz önüne alındığında, buradan $dy = \psi(p)\varphi'(p)dp$, sonuçta da, $y = \int \psi(p)\varphi'(p)dp + C$ elde edilir. Böylece, (7) denkleminin çözüm fonksiyonu için,

$$\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = \int \psi(p)\varphi'(p)dp + C \end{cases}$$

parametrik denklemini elde ederiz.

Örnek çözümünde, (7) denklemi için $\psi(p)$ fonksiyonu, denkleme bağlı olarak, çözümü kolaylaştıracak şekilde seçilir, $\varphi(p)$ ise denklemden belirlenir. Çoğu durumda, (7) denklemi $x$'e göre çözülebiliyorsa, o zaman $\psi(p) = p$ yani $y' = p$ olarak kabul edilir.

---

**ÖRNEK 3** Aşağıdaki denklemleri çözün.

**(a)** $x = y' \cos y'$ **(b)** $x\sqrt{1 - (y')^2} = 3y'$

○ **(a)** Denklem, $x$'e göre çözülmüş olduğundan, $y' = p$ kabul edersek,

$$\begin{cases} x = p \cos p \\ y' = p \end{cases}$$

parametrik şeklini alır. $dy = y'dx$ eşitliğinden yararlanırsak, $y$'yi belirlemek için,

$$dy = (p \cos p - p^2 \sin p)dp$$

diferansiyel denklemini elde ederiz ($dx = (\cos p - p \sin p)dp$ olduğundan). Buradan,

$$y = \int (p \cos p - p^2 \sin p)dp \quad \text{yani} \quad y = p^2 \cos p - p \sin p - \cos p + C$$

buluruz ve verilen denklemin genel çözümünü

$$\begin{cases} x = p \cos p \\ y = p^2 \cos p - p \sin p - \cos p + C \end{cases}$$

olmak üzere parametrik şekilde elde ederiz;

**(b)** Verilen denklemin $x$'e göre çözülebilirliğine karşın, $y' = p$ yerine $y' = \sin p$ (veya $y' = \cos p$) kabul edilmesi daha uygundur. O zaman denklem

$$\begin{cases} x\sqrt{1-\sin^2 p} = 3\sin p \\ y' = \sin p \end{cases} \quad \text{yani} \quad \begin{cases} x = 3\tan p \\ y' = \sin p \end{cases}$$

parametrik şeklini alır. $dy = y'dx$ ifadesinden $\left( dx = \dfrac{3dp}{\cos^2 p} \right)$,

$$dy = \frac{3\sin p}{\cos^2 p}\,dp$$

denklemi elde edilir. Buradan, integrallemeyle

$$y = \frac{3}{\cos p} + C$$

bulunur. Böylece, ele alınan denklemin genel çözümü

$$\begin{cases} x = 3\tan p \\ y = \dfrac{3}{\cos p} + C \end{cases}$$

olur. ○

---

### 2.10.4 (1) Denkleminin Bağımsız Değişkeni Doğrudan İçermemesi

$$F(y, y') = 0 \tag{9}$$

Bu durumda da, 3. seçenekte olduğu gibi, parametre kullanma yöntemi uygulanabilir:

$$\begin{cases} y = \varphi(p) \\ y' = \psi(p) \end{cases} \tag{10}$$

Yine, $dy = y'dx$ yani $dx = \dfrac{1}{y'}dy$ eşitliğini ve $dy = \varphi'(p)\,dp$ olduğunu kullanıp $dx = \dfrac{1}{\psi(p)}\varphi'(p)dp$ diferansiyel denklemini elde ederiz. Buradan $x = \int \dfrac{\varphi'(p)}{\psi(p)}dp + C$ elde ederiz. Böylece, ele alınan denklemin çözüm fonksiyonunun

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{\varphi'(p)}{\psi(p)}dp + C \\ y = \varphi(p) \end{cases}$$

parametrik şekli bulunur.

(9) denklemi için de, $\psi(p)$ fonksiyonu, denkleme bağlı olarak, çözümü kolaylaştıracak şekilde seçilir, $\varphi(p)$ ise denklemden belirlenir. (9) denklemi $y$'ye göre çözülebiliyorsa, o zaman çoğu durumda $y' = p$ kabul edilir.

---

**ÖRNEK 4** Aşağıdaki denklemleri çözün.

**(a)** $y = (y' - 1)e^{y'}$ **(b)** $y\sqrt{1 + (y')^2} = 5y'$

○ **(a)** $y' = p$ kabul edersek, denklemin

$$\begin{cases} y = (p-1)e^p \\ y' = p \end{cases}$$

parametrik şeklini buluruz. $dx = \frac{1}{y'}dy$ ve $dy = [e^p + (p-1)e^p]dp = pe^p dp$ eşitliklerine göre, $dx = \frac{1}{p} \cdot pe^p dp$ yani $dx = e^p dp$ olduğundan, $x = e^p + C$ olur. Böylece, denklemin çözümü

$$\begin{cases} x = e^p + C \\ y = (p-1)e^p \end{cases}$$

olarak parametrik şekilde bulunur;

**(b)** Verilen denklemin $y$'ye göre çözülebilirliğine karşın, $y' = p$ yerine $y' = \tan p$ kabul edilmesi daha uygundur. O zaman denklem

$$\begin{cases} y\sqrt{1 + \tan^2 p} = 5\tan p \\ y' = \tan p \end{cases} \quad \text{yani} \quad \begin{cases} y = 5\sin p \\ y' = \tan p \end{cases}$$

parametrik şeklini alır. $dx = \frac{1}{y'}dy$ ve $dy = 5\cos p dp$ eşitliklerine göre,

$dx = \frac{1}{\tan p} \cdot 5\cos p dp$ yani $dx = \frac{5\cos^2 p}{\sin p}dp$ olduğundan,

$x = 5\int \frac{\cos^2 p}{\sin p}dp$ yani, $x = 5\ln\left|\tan\frac{p}{2}\right| + 5\cos p + C$ olur ve aranan genel çözüm

$$\begin{cases} x = 5\ln\left|\tan\frac{p}{2}\right| + 5\cos p + C \\ y = 5\sin p \end{cases}$$

olarak parametrik şekilde bulunur. ○

---

### 2.10.5 Lagrange Denklemi

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \qquad (\varphi(y') \not\equiv y') \tag{11}$$

şeklindeki diferansiyel denkleme *Lagrange denklemi* denir.

Lagrange denkleminde, $y' = p$ kabul edersek,

$$y = x\varphi(p) + \psi(p) \tag{12}$$

olur. Her iki tarafın $x$'e göre türevini alıp $y' = p$ olduğunu göz önüne alalım:

$$y' = \varphi(p) + x\varphi'(p)p' + \psi'(p)p'$$

$$p - \varphi(p) = [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}$$

Buradan, $\frac{dp}{dx} \neq 0$ kabul edip

$$[p - \varphi(p)]\frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \psi'(p) \tag{13}$$

yani $x$'e göre doğrusal diferansiyel denklem elde ederiz ( $p - \varphi(p) \neq 0$ durumunda).

(13) denkleminin çözümü olarak bulunan $\Phi(x, p, C) = 0$ fonksiyonu, (12) eşitliğiyle birlikte,

$$\begin{cases} \Phi(x, p, C) = 0 \\ y = x\varphi(p) + \psi(p) \end{cases} \tag{14}$$

olmak üzere, (11) denkleminin genel çözümünü belirler.

$p - \varphi(p) = 0$ denkleminin $p = p_i$ olmak üzere gerçel kökleri varsa, sözü edilen kökleri (12) denkleminde yazdığımızda, elde edilen

$$y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i)$$

fonksiyonları da (11) denkleminin çözümleridir (özel).

---

**ÖRNEK 5** $y = x(y')^2 + (y')^3$ denklemini çözün.

○ $y' = p$ kabul edersek,

$$y = xp^2 + p^3 \tag{*}$$

olur. Her iki tarafın $x$'e göre türevini alırsak,

$$y' = p^2 + 2xp\frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx} \quad \text{veya} \quad p(1 - p) = (2xp + 3p^2)\frac{dp}{dx}$$

elde ederiz. $\dfrac{dp}{dx} \neq 0$ kabul edip denklemi

$$p(1-p)\frac{dx}{dp} = 2xp + 3p^2$$

şeklinde yazalım. $p(1-p) \neq 0$, yani $p \neq 0$, $p \neq 1$ kabul edip buradan,

$$\frac{dx}{dp} - \frac{2}{1-p}x = \frac{3p}{1-p}$$

doğrusal denklemini elde ederiz ( $x(p)$ 'ye göre). Doğrusal denklemin çözüm formülüne göre (bkz. Bölüm 2.6),

$$x = \exp\left(2\int \frac{dp}{1-p}\right)\left[3\int \frac{p}{1-p}\exp\left(-2\int \frac{dp}{1-p}\right)dp + C\right]$$

yazıp buradan

$$x = \frac{C}{(1-p)^2} + \frac{p^2(3-2p)}{2(1-p)^2} \qquad (**)$$

buluruz. Bulunan $x$ değeri, (*) ile birlikte,

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{(1-p)^2} + \dfrac{p^2(3-2p)}{2(1-p)^2} \\ y = \dfrac{Cp^2}{(1-p)^2} + \dfrac{2p^3 - p^4}{2(1-p)^2} \end{cases} \quad \text{veya} \quad \begin{cases} x = \dfrac{2C + p^2(3-2p)}{2(1-p)^2} \\ y = \dfrac{(2C + 2p - p^2)p^2}{2(1-p)^2} \end{cases}$$

olarak, verilen denklemin genel çözümünün parametrik şeklini ifade eder ( $y$ 'nin ifadesini bulurken, (*) eşitliğinde (**) eşitliğini göz önüne aldık).

$p = 0$ ve $p = 1$ durumlarında, (*) denkleminden sırasıyla, $y = 0$ ve $y = x + 1$ olmak üzere tekil çözümlerini elde ederiz. Bu çözümler, $C$ 'nin hiçbir değerinde, parametrik şekilde bulunan genel çözümden elde edilemez. ○

---

### 2.10.6 Clairaut Denklemi

$$y = xy' + \psi(y') \qquad (15)$$

şeklindeki denkleme *Clairaut denklemi* denir. Görüldüğü gibi, Clairaut denklemi Lagrange denkleminin özel durumudur ($\varphi(y') \equiv y'$). $y' = p$ kabul edip elde edilen

$$y = xp + \psi(p) \qquad (16)$$

denkleminin her iki tarafının $x$ 'e göre türevini alırsak,

$$y' = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx} \quad \text{veya} \quad [x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0$$

elde ederiz. Buradan, $\frac{dp}{dx} = 0$ yani $p = C$ ve $x + \psi'(p) = 0$ yazılabilir.

$p = C$ 'yi (16) eşitliğinde yazdığımızda, çözüm olarak bir $C$ parametresine bağlı

$$y = xC + \psi(C)$$

doğru ailesini elde ederiz (genel çözüm).

$x + \psi'(p) = 0$ denklemi, (16) denklemiyle birlikte

$$\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = xp + \psi(p) \end{cases} \quad \text{yani} \quad \begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p) \end{cases} \tag{17}$$

çözümünü oluşturur (tekil çözüm).

Açıklamaya gerek kalmadan görüleceği gibi, *Clairaut denkleminin genel çözümünü bulmak için, denklemde $y'$ yerine $C$ sabitini yazmak yeterlidir.*

---

**ÖRNEK 6** Aşağıdaki denklemleri çözün.

**(a)** $y = xy' + (y')^2$ **(b)** $y = xy' + \cos y'$

○ **(a)** Denklemde $y' = C$ yazarsak,

$$y = Cx + C^2$$

genel çözümünü buluruz. $\psi(p) = \psi(y') = (y')^2 = p^2$ olduğunu (17) eşitliklerinde göz önüne aldığımızda ise,

$$\begin{cases} x = -2p \\ y = -p^2 \end{cases} \quad \text{yani} \quad y = -\frac{x^2}{4}$$

tekil çözümünü buluruz;

**(b)** Yine $y' = C$ olduğunu denklemde yazıp,

$$y = Cx + \cos C$$

genel çözümünü buluruz. $\psi(y') = \cos y'$ olduğundan, (17) eşitliğine göre tekil çözüm

$$\begin{cases} x = \sin p \\ y = p \sin p + \cos p \end{cases}$$

olur. ○

---

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 2.10 için)

**1.** Aşağıdaki diferansiyel denklemleri $y'$'ye göre çözüp integralleyin.

**(a)** $y'^2 - 2xy' - 3x^2 = 0$ **(b)** $y'^2 + 2\ln x \cdot y' - 8\ln^2 x = 0$

**(c)** $(y')^2 - (x + y)y' + xy = 0$ **(d)** $(y')^2 + 5\sin x \cdot y' + 6\sin^2 x = 0$

**(e)** $(y')^3 + (4x - 1)(y')^2 + (3x^2 - 4x)y' - 3x^2 = 0$

**2.** Aşağıdaki denklemlerin genel integralini bulun.

**(a)** $(y')^3 + 3(y')^2 - 5 = 0$ **(b)** $(y')^5 + 3(y')^3 + 4y' - 3 = 0$

**(c)** $\sin y' + \cos y' = 1$

**3.** Aşağıdaki denklemleri çözün.

**(a)** $x = ay' + b(y')^2$ **(b)** $x = \cos y' + \ln y'$

**(c)** $x = (y')^5 + 3(y')^2$ **(d)** $x(y')^3 = 1 + y'$

**(e)** $x = 3y' - 2\ln y'$ **(f)** $x\sqrt{1 + (y')^2} = ay'$

**(g)** $y = a\sqrt{1 + (y')^2}$ **(h)*** $y^{2/3} + y'^{2/3} = 1$

**4.** Aşağıdaki Lagrange ve Clairaut denklemlerini çözün.

**(a)** $y = (y')^2(x + 1)$ **(b)** $y = xy' - \ln y'$

**(c)** $y = (x + 1)y' + (y')^2$ **(d)** $y = (x + 1)y' + \sqrt{y'}$

**(e)** $y = \frac{1}{2}(xy' + y'\ln y')$ **(f)** $2yy' = x[(y')^2 + 4]$

**5.** Teğetlerinin koordinat eksenlerinden ayırdığı parçaların toplamı $2a$ olan eğrinin denklemini bulun.

**6.** Teğetinin koordinat eksenleriyle oluşturduğu üçgenin alanı $2a^2$ olan eğrinin denklemini bulun.

## BÖLÜM 2 İÇİN ÇEŞİTLİ ALIŞTIRMALAR

**1.** Aşağıdaki denklemlerin türünü belirleyin ve çözüm yöntemini yazın.

**(a)** $y' = \dfrac{1 + y^2}{xy(1 + x^2)}$ **(b)** $\dfrac{xy' - y}{x} = \tan\dfrac{y}{x}$

**(c)** $y' = e^{2x} - e^x y$ **(d)** $y' = 2xy + y^3$

**(e)** $(x^2 - xy)y' = y^4$ **(f)** $xy' + y = \sin y$

**(g)** $(x^2 + 2xy^3)dx + (y^2 + 3x^2y^2)dy = 0$ **(h)** $(xy^3 + \ln x)dx = y^2dy$

**2.** Aşağıdaki denklemlerin türünü belirleyip gerekli yöntemle çözün.

**(a)** $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$ **(b)** $yy' = -2x\sec y$

**(c)** $y' = \sinh(x + y) + \sinh(x - y)$ **(d)** $xdx = \left(\dfrac{x^2}{y} - y^3\right)dy$

**(e)** $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$ **(f)** $y = xy' + y'\ln y'$

**(g)** $xy' + y = xy^2\ln x$ **(h)** $\dfrac{xy' - y}{x} = \tan\dfrac{y}{x}$

**(i)** $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}dy = 0$

**(j)** $\dfrac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \dfrac{dy}{2y^2 - xy}$

**(k)** $x^2(y + 1)dx + (x^3 - 1)(y - 1)dy = 0$

**(l)** $y' - y\dfrac{2x - 1}{x^2} = 1$ **(m)** $(1 - x^2)y' + xy = a$

**(n)** $xy^3dx = (x^2y + 2)dy$ **(o)** $y' = \dfrac{3x^2}{x^3 + y + 1}$

**(p)** $y' = \dfrac{y}{x} + \tan\dfrac{y}{x}$ **(r)** $yy' + y^2 = \cos x$

**(s)** $(x - 2xy - y^2)dy + y^2dx = 0$ **(t)** $y' = \dfrac{(1 + y)^2}{x(y + 1) - x^2}$

**(u)** $y' = \dfrac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$ **(v)** $a(xy' + 2y) = xyy'$

**(y)** $xdy - ydx = y^2dx$

**(z)** $xy(y')^2 - (x^2 + y^2)y' + xy = 0$

**(za)** $yx^{y-1}dx + x^y \ln xdy = 0$

**(zb)** $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{ydx - xdy}{x^2}$

**(zc)** $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0$

**(zd)** $(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dy = 0$

**(ze)** $y = xy' + \dfrac{1}{(y')^2}$

**(zf)** $2xyy' = 3y^2 + 4x^2$

**3.** Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün.

**(a)** $y' = \dfrac{y+1}{x}$, $y(1) = 0$

**(b)** $e^{x-y}y' = 1$, $y(1) = 1$

**(c)** $y' - \dfrac{y}{1-x^2} = 1 + x$, $y(0) = 1$

**(d)** $\dfrac{y - xy'}{x + yy'} = 2$, $y(1) = 1$

**(e)** $y'\cot x + y = 2$, $y(0) = 2$

**(f)** $\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1+\sin y}} + y' = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

**(g)** $2xyy' + x^2 - y^2 = 0$, $y(1) = 0$

**(h)** $(1 + e^x)yy' = e^y$, $y(0) = 0$

**(i)** $y' = 3x^2y + x^5 + x^2$, $y(0) = 1$

# BÖLÜM 3

# Yüksek Mertebeden Diferansiyel Denklemler. Diferansiyel Denklemler Sistemi

## 3.1 YÜKSEK MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Mertebesi birden büyük olan diferansiyel denklemler, *yüksek mertebeden diferansiyel denklemler* diye adlandırılır. Bilindiği gibi (bkz. Bölüm 2.1), $n$. mertebeden diferansiyel denklemin genel şekli

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

normal şekli

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \tag{2}$$

başlangıç koşulları ise

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{3}$$

ile gösterilir. Burada, $F(u, v_0, v_1, v_2, ..., v_n)$, $n+2$ boyutlu uzayın bir $\Omega_{n+2}$ bölgesinde, $f(u, v_0, v_1, v_2, ..., v_{n-1})$, $n+1$ boyutlu uzayın bir $\Omega_{n+1}$ bölgesinde tanımlı belli fonksiyonlar, $(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}) \in \Omega_{n+1}$ ise belli bir noktadır.

(2)-(3) başlangıç değer probleminin çözümüyle ilgili, ispatsız kabul edeceğimiz aşağıdaki teorem doğrudur.

**TEOREM** **(varlık ve teklik)** $f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ fonksiyonu, $\Omega \subset R^{n+1}$ bölgesinde sürekli olup $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, ..., \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ sürekli kısmi türevlerine sahipse, o zaman, her $(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}) \in \Omega_{n+1}$ noktası için, $x_0$'ı içeren bir $(a, b)$ aralığı ve bu aralıkta (2), (3) probleminin tek bir çözümü vardır.

Açıktır ki, varolan tek çözüm, $x$'in yanısıra $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$'ye de bağlıdır. Yani, gerektiğinde, (2)-(3) (aynı zamanda (1)-(3)) probleminin çözümü

$$y = y(x, x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$$

şeklinde de yazılabilir.

Yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümünü bulmak için, kimi özel durumlar hariç, genel bir yöntem yoktur (böyle bir yöntemi bulmanın olanaksızlığı ispatlanmıştır). Bu nedenle, yüksek mertebeden denklemlerin aşağıdaki bazı kareleştirilebilir özel durumlarını ele alalım. Açıklamayı $n$. mertebeden denklemler için yapıp, uygulamada esas olarak ikinci mertebeden denklemleri ele alacağız.

### 3.1.1 $y^{(n)} = f(x)$ Şeklindeki Denklemler

Bu durumda denklemi

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x) \qquad \text{yani} \qquad dy^{(n-1)} = f(x)dx$$

şeklinde yazıp her iki tarafın integralini alırsak,

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$$

olur. Süreç $n$ kere ardarda uygulandığında, genel çözüm

$$y = \underbrace{\int\int...\int}_{n \text{ tane}} f(x)dxdx...dx + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + ... + C_{n-1}x + C_n \tag{4}$$

olarak bulunur (ardarda integralleme sürecinde, $C_i$ katsayılarının ($i = \overline{1, n}$) bölündüğü $i!$ sayılarının genel çözümde önemi olmadığından yazılmamıştır).

Ele alınan denklemin (3) başlangıç koşullarını sağlayan çözümü için, yine ardarda integralleme yoluyla ($[x_0, x]$ aralığında), *Cauchy formülü* denen

$$y(x) = \underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t_1}...\int_{x_0}^{t_n}}_{n \text{ kere}} f(t_n)dt_ndt_{n-1}...dt_1 + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

$$+ \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + ... + \frac{y_0'}{1!}(x-x_0) + y_0 \tag{5}$$

formülü elde edilebilir.

Ardarda diferansiyelleme yoluyla doğrulanabilen

$$y(x) = \underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t_1}...\int_{x_0}^{t_n}}_{n \text{ kere}} f(t_n)dt_ndt_{n-1}...dt_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt \tag{6}$$

formülünü (5) eşitliğinde göz önüne alırsak, ele alınan denklem için Cauchy probleminin çözümü

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} +$$

$$\frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + \ldots + \frac{y_0'}{1!}(x-x_0) + y_0 \qquad (5^*)$$

olur.

---

**ÖRNEK 1** Aşağıdaki denklemleri çözün.

**(a)** $y''' = \sin 2x$ **(b)** $y'' = e^{x^2}$

○ **(a)** Üç kere ardarda integralleme yaparsak,

$$y'' = \int \sin 2x dx + C_1 \text{ yani } y'' = -\frac{1}{2}\cos 2x dx + C_1$$

$$y' = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2$$

$$y = \frac{1}{8}\cos 2x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

olur;

**(b)** $\int e^{x^2}dx$ integrali hesaplanamaz olduğundan (bkz. 1, Bölüm 5.2) ardarda integralleme yerine, $n = 2$ durum için $x_0 = 0$, $y_0 = C_1$, $y_0' = C_2$ kabul edip doğrudan (5*) formülünü kullanırsak, aranan genel çözüm

$$y = \int_0^x e^{t^2}(x-t)dt + C_2 x + C_1$$

olarak bulunur. ○

---

**Uyarı 1** Başlangıç değer problemi incelendiğinde, çözüm sırasında elde edilen $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$ integrali hesaplanamaz olduğunda doğrudan (5*) formülünü uygulamak elverişlidir. Örneğin, **(b)** seçeneğindeki denklemin $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, (5*) formülüne göre,

$$y = \int_0^x e^{t^2}(x-t)dt + 2x + 1$$

olarak yazılabilir.

### 3.1.2 $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$ Şeklindeki Denklemler

Görüldüğü gibi, ele alınan denklem, aranan fonksiyonu ve onun $(k-1)$. mertebeye kadar türevlerini içermemektedir. Bu durumda,

$$y^{(k)} = z$$

yerine koymasının yardımıyla (burada $z = z(x)$, bilinmeyen yeni fonksiyondur ve $y^{(k+1)} = z', ...,\ y^{(n)} = z^{(n-k)}$ olarak belirlenir) denklem

$$F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0 \qquad (7)$$

olmak üzere, $(n-k)$. mertebeden denkleme dönüşür. Bu nedenle, ele alınan denkleme, *mertebesi k kadar indirgenebilir denklem* denir. (7) denklemi çözülebilir ise,

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$$

olarak bulunur. Sonucu yerine koymada göz önüne alırsak,

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$$

olur ve $k$ kere ardarda integrallemeyle,

$$y = \underbrace{\int\int ... \int}_{k \text{ tane}} \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})dxdx...dx + C_{n-k+1}x^{k-1} + ... + C_{n-1}x + C_n$$

genel çözümü bulunur.

$F(x, y', y'') = 0$ **özel durumu** $(n = 2, k = 1)$. Bu durumda denklem, $y' = z$ yerine koymasının yardımıyla $(y'' = z')$,

$$F(x, z, z') = 0$$

olmak üzere 1. mertebeden denkleme dönüşür ve belli olan yöntemlerden biriyle çözülür ( eğer mümkünse).

**Uyarı 2** Yüksek mertebeden denklemlerde $y^{(k)} = z$ yerine koyması yapıldığı durumlarda önce, $y^{(k)} = 0$ 'ın, yani, $y = C_1x^{(k-1)} + C_2x^{k-2} + \cdots + C_k$ 'nin ($k = 1$ durumunda, $y = C$ 'nin) çözüm olup olmadığına dikkat etmek gerekir. Aksi takdirde çözüm kaybı olabilir.

**ÖRNEK 2** Aşağıdaki denklemleri çözün.

(a) $xy'' + a(y'')^2 - y' = 0 \quad (a \neq 0)$ (b) $2y''' + (y'')^3 = 0$

○ (a) $y = C$ 'nin ele alınan denklemin bir özel çözümü olduğu açıktır. $y' = z$ yerine koyması uygulandığında, denklem

$$xz' + a(z')^2 - z = 0 \qquad \text{yani} \qquad z = xz' + a(z')^2$$

Clairaut denklemine dönüşür (bkz. Bölüm 2.10 $\psi(z') = (z')^2$)). Bunun genel çözümünün

$$z = C_1 x + aC_1^2$$

olduğu açıktır. Sonucu yerine koymada yazdığımızda,

$$y' = C_1 x + aC_1^2$$

buradan da, verilen denklemin

$$y = \frac{C_1}{2}x^2 + aC_1^2 x + C_2$$

genel çözümü bulunur;

(b) $y'' = 0$, denklemi sağladığından, $y = C_1 x + C_2$ denklemin bir özel çözümüdür. $y'' = z$ kabul edip ($y''' = z'$), denklemi

$$2z' + z^3 = 0 \qquad \text{veya} \qquad \frac{2dz}{z^3} + dx = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan,

$$-\frac{1}{z^2} + x + C_1 = 0 \qquad \text{veya} \qquad z^2 = \frac{1}{x + C_1}$$

bulup yerine koymada göz önüne alırsak,

$$(y'')^2 = \frac{1}{x + C_1} \qquad \text{veya} \qquad y'' = \pm\frac{1}{\sqrt{x + C_1}}$$

olur. İki kere ardarda integralleme yaparsak, ele alınan denklemin

$$y = \pm\frac{4}{3}(x + C_1)^{3/2} + C_2 x + C_3$$

genel çözümünü buluruz. ○

**Uyarı 3** İncelenen durumun $F(y', y'') = 0$ biçimini de içerdiği açıktır.

---

**ÖRNEK 3** Herhangi esnek türdeş metal halat (veya zincir) uçlarından asıldığında, ağırlık kuvvetinin etkisiyle şeklini alacağı $AB$ eğrisinin denklemini çıkarın (Şekil 17).

○ Sözü edilen halatın aldığı durumun denklemini $y = y(x)$, en alt noktasını ise $C$ ile gösterelim. Halatın $C\bar{D}$ yayını alıp bunun ağırlık kuvvetinin (**F**) değeri için

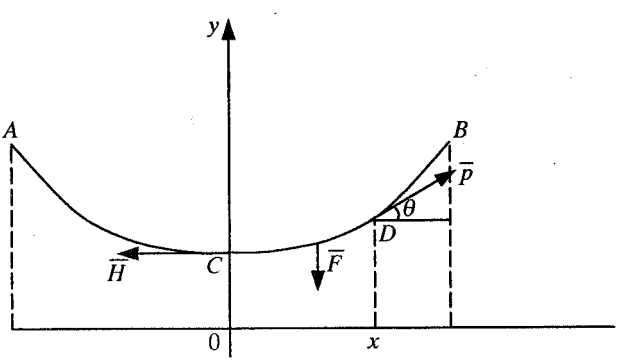
$$|\mathbf{F}| = \rho \cdot \text{uz}C\bar{D} \quad \text{veya} \quad |\mathbf{F}| = \rho\int_0^x \sqrt{1 + [y'(t)]^2}\, dt$$

yazılabilir (burada, $\rho = sb$ halatın yoğunluğu, $\int_0^x \sqrt{1 + [y'(t)]^2}\, dt$ ise $C\bar{D}$ yayının uzunluğudur (bkz. 1, Bölüm 7.2). Açıktır ki, yayın bu kısmına, $C$ noktasındaki yatay gerilim (**H**), $D$ noktasındaki teğet yönündeki gerilim (**T**) ve sözü edilen kısmın ağırlık (**F**) kuvvetleri olmak üzere üç kuvvet etki yapmaktadır. Statiğin temel kuralına göre, sözü edilen kuvvetlerin, sırasıyla dikey ve yatay eksenler üzerine izdüşümlerinin toplamı sıfıra eşit olmalıdır (**T** vektörünün apsis ekseninin pozitif yönüyle oluşturduğu açı $\theta$ olsun), yani,

$$\begin{cases} |\mathbf{T}|\cos(90° - \theta) + |\mathbf{H}|\cos 90° + |\mathbf{F}|\cos 180° = 0 \\ |\mathbf{T}|\cos\theta + |\mathbf{H}|\cos 180° + |\mathbf{F}|\cos 90° = 0 \end{cases} \quad \text{veya}$$

$$\begin{cases} |\mathbf{T}|\sin\theta = \rho\int_0^x \sqrt{1 + [y'(t)]^2}\, dt \\ |\mathbf{T}|\cos\theta = |\mathbf{H}| \end{cases}$$

eşitlikleri doğrudur.




**ŞEKİL 17**

Son eşitlikleri taraf tarafa bölüp,

$$\tan\theta = \frac{\rho}{|\mathbf{H}|}\int_0^x \sqrt{1+[y'(t)]^2}\,dt \quad \text{yani} \quad y' = k\int_0^x \sqrt{1+[y'(t)]^2}\,dt \qquad \left(k = \frac{\rho}{|\mathbf{H}|}\right)$$

buradan da, her iki tarafın $x$'e göre türevini aldığımızda (bkz. 1, Bölüm 6.4),

$$y'' = k\sqrt{1+[y'(x)]^2}$$

olmak üzere 2. mertebeden diferansiyel denklemini elde ederiz ($F(y', y'') = 0$). $y' = z$ yerine koymasını yaparsak ($y'' = z'$), denklem

$$z' = k\sqrt{1+z^2} \quad \text{yani} \quad \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = kdx$$

şeklini alır. Buradan,

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = kx + C_1 \quad \text{veya} \quad \ln(z+\sqrt{1+z^2}) = kx + C_1$$

ve sonuçta

$$z + \sqrt{1+z^2} = e^{kx+C_1} \qquad (*)$$

buluruz. Her iki tarafı $z - \sqrt{1+z^2}$ ile çarpıp $(z-\sqrt{1+z^2})(z+\sqrt{1+z^2}) = -1$ olduğunu göz önüne alırsak,

$$z - \sqrt{1+z^2} = -e^{-(kx+C_1)} \qquad (**)$$

olur. (*) ve (**) eşitliklerini taraf tarafa topladığımızda,

$$z = \frac{1}{2}\left(e^{kx+C_1} - e^{-(kx+C_1)}\right) \quad \text{yani} \quad z = \sinh(kx + C_1)$$

olur. Burada, yerine koymayı göz önüne aldığımızda,

$$y' = \sinh(kx + C_1) \quad \text{yani} \quad y = \frac{1}{k}\cosh(kx + C_1) + C_2 \qquad (***)$$

bulunur. Demek ki, halatın durumu (***) eşitliğiyle belirlenir. (***) eşitliğinin belirlediği eğri, *zincir eğrisi* diye adlandırılır ($C_1$ ve $C_2$ sabitleri, ek başlangıç koşullarına göre belirlenir). Başlangıç koşullarını $y(0) = \frac{1}{k}$, $y'(0) = 0$ olarak kabul edersek, $C_1 = C_2 = 0$ olur ve zincir eğrisinin denklemi

$$y = a\cosh\frac{x}{a} \quad \text{veya} \quad y = a(e^{x/a} + e^{-x/a}) \qquad (a = 1/k) \tag{Z}$$

şeklini alır. Çoğu durumda, zincir eğrisi dendiğinde, (Z) denkleminin belirlediği eğri düşünülür. $a = 1$ yani $k = 1$ kabul edersek, denklem $y = \cosh x$ şeklini alır. Demek ki, hiperbolik kosinüs fonksiyonunun grafiği zincir eğrisinin özel bir durumudur (hiperbolik fonksiyonlarla ilgili olarak bkz. 1, Bölüm 1.14). O

---

**Uyarı 4** Asma köprü halatının denklemini çıkardığımızda da (bkz. Bölüm 2.4), Örnek 3'te kullanılan kurallara dayanmış, ancak farklı sonuç almıştık. Bunun nedeni, köprü halatının denklemini çıkarırken halatın ağırlığının ihmal edilmesidir (köprünün ağırlığı karşısında halatın ağırlığı çok küçük olduğundan).

### 3.1.3 $F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ Şeklindeki Denklemler

Görüldüğü gibi, ele alınan denklem doğrudan bağımsız değişkeni içermiyor. Denklemde

$$y' = z$$

yerine koyması yapıp $y$'yi bağımsız değişken olarak düşünelim. O zaman, diğer türevleri bileşik fonksiyonun türevi formülüne göre (bkz. 1, Bölüm 3.4),

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$$

$$y''' = \left(z\frac{dz}{dy}\right)'_x = \left(z\frac{dz}{dy}\right)'_y \frac{dy}{dx} = z\left[\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z\frac{d^2z}{dy^2}\right]$$

.....

$$y^{(n)} = Z\left(z, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dy^2}, ..., \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right)$$

olarak bulup denklemde yazarsak, $z(y)$'ye göre $(n-1)$. mertebeden denklem elde ederiz. Biz $n = 2$ durumunu açıklayalım.

$F(y, y', y'') = 0$ **özel durumu.** Bu durumda denklem, $y' = z$ yerine koymasının yardımıyla $\left(y'' = z\dfrac{dz}{dy}\right)$

$$F\left(y, z, z\frac{dz}{dy}\right) = 0$$

olmak üzere 1. mertebeden denkleme dönüşür ve belli yöntemlerden biriyle çözülür (eğer mümkünse).

---

**ÖRNEK 4** Aşağıdaki denklemleri çözün.

(a) $y'' + 2yy' = 0$ (b) $2yy'' = y^2 + (y')^2$ (c) $y'y''' = 3(y'')^2$

○ (a) $y' = 0$ yani $y = C$'nin denklemi sağladığı açıktır. Demek ki, $y = C$ denklemin bir özel çözümüdür. $y' = z$ kabul edersek $\left(y'' = z\dfrac{dz}{dy}\right)$ ele alınan denklem

$$z\frac{dz}{dy} + 2yz = 0 \qquad \text{yani} \qquad z\left(\frac{dz}{dy} + 2y\right) = 0$$

şeklini alır. Buradan, $\dfrac{dz}{dy} + 2y = 0$, sonuçta ise $z + y^2 = \tilde{C}_1$ bulunur. Yerine koymayı göz önüne aldığımızda,

$$y' = \tilde{C}_1 - y^2 \qquad \text{yani} \qquad \frac{dy}{\tilde{C}_1 - y^2} = dx$$

olur. Son eşitlikten,

**1.** $\tilde{C}_1 < 0$ durumunda $(\tilde{C}_1 = -C_1^2)$

$$-\frac{1}{C_1}\arctan\frac{y}{C_1} = x + C_2 \qquad \text{yani} \qquad y = -C_1 \tan C_1(x + C_2)$$

**2.** $\tilde{C}_1 = 0$ durumunda,

$$\frac{1}{y} = x + C \qquad \text{yani} \qquad y = \frac{1}{x + C} \quad \text{(özel çözüm)}$$

**3.** $\tilde{C}_1 > 0$ durumunda ise $(\tilde{C}_1 = C_1^2)$

$$\frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{C_1 + y}{C_1 - y}\right| = x + C_2 \qquad \text{yani} \qquad y = C_1\frac{e^{2C_1(x+C_2)} - 1}{e^{2C_1(x+C_2)} + 1}$$

veya

$$y = C_1 \tanh C_1(x + C_2)$$

çözümü bulunur;

**(b)** $y = 0$ 'ın denklemin bir özel çözümü olduğu açıktır. Yine, $y' = z$ yerine koymasını uygularsak $\left(y'' = z\dfrac{dz}{dy}\right)$

$$2yz\frac{dz}{dy} = y^2 + z^2$$

olur. Burada, $z^2 = u$ kabul edersek, $2z\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{du}{dy}$ olur ve denklem

$$y\frac{du}{dy} = y^2 + u \qquad \text{veya} \qquad \frac{du}{dy} - \frac{1}{y}u = y$$

yani, yeni bilinmeyen $u(y)$ fonksiyonuna göre 1. mertebeden doğrusal denkleme dönüşür ve çözümü

$$u = y^2 + C_1 y \qquad \text{yani} \qquad z^2 = y^2 + C_1 y$$

olur (bkz. Bölüm 2.6). Son eşitliği

$$z = \pm\sqrt{y^2 + C_1 y} \qquad \text{yani} \qquad y' = \pm\sqrt{y^2 + C_1 y} \qquad \text{veya} \qquad \frac{dy}{\sqrt{y^2 + C_1 y}} = \pm dx$$

şeklinde yazıp, ele alınan denklemin çözümünü

$$\ln\left|y + \frac{C_1}{2} + \sqrt{y^2 + C_1 y}\right| = \pm x + C_2$$

olarak buluruz (hesaplamada, $\sqrt{y^2 + C_1 y} = \sqrt{(y + C_1/2)^2 - (C_1/2)^2}$ olduğunu ve $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u - \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$ formülünü kullandık. Bkz. 1, Bölüm 5.2);

**(c)** $y = C$ 'nin denklemin bir özel çözümü olduğu açıktır. $y' = z$ yerine koymasını kullanırsak, $y'' = z\dfrac{dz}{dy}$, $y''' = z\left[\left(\dfrac{dz}{dy}\right)^2 + z\dfrac{d^2z}{dy^2}\right]$ olur ve denklem

$$z^2\left[\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z\frac{d^2z}{dy^2}\right] = 3z^2\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \quad \text{veya} \quad z^3\frac{d^2z}{dy^2} = 2z^2\left(\frac{dz}{dy}\right)^2$$

biçimini alır. Buradan,

$$z\frac{d^2z}{dy^2} = 2\left(\frac{dz}{dy}\right)^2$$

yazıp yeniden $\frac{dz}{dy} = u$ yerine koymasını yaparsak $\left(\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{du}{dy} = \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy} = u\frac{du}{dz}\right)$,

$$zu\frac{du}{dz} = 2u^2$$

denklemini elde ederiz. Buradan,

**1.** $u = 0$ durumunda,

$$z' = 0 \Rightarrow z = C_1 \Rightarrow y' = C_1 \Rightarrow y = C_1x + C_2$$

yani, özel çözüm bulunur;

**2.** $z\frac{du}{dz} = 2u$ durumunda ise,

$$\frac{du}{u} = \frac{2dz}{z} \quad \text{yani} \quad \ln|u| = 2\ln|z| + \ln C_1 \quad \text{veya} \quad u = C_1z^2$$

bulunur. Son eşitlikte $u = z'$, daha sonra da, $z = y'$ olduğu göz önüne alındığında,

$$z' = C_1z^2 \Rightarrow \frac{dz}{z^2} = C_1dy \Rightarrow z = -\frac{1}{C_1y + C_2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{C_1y + C_2} \Rightarrow C_1\frac{y^2}{2} + C_2y + x = C_3$$

olur. Böylece, ele alınan denklemin genel integralini bulmuş oluruz. ○

---

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 3.1 için)

**1.** Aşağıdaki denklemleri çözün.

**(a)** $y'' = 6x^2 + 3x$

**(b)** $y'' = x - \cos 2x$

**(c)** $y'' = \arctan x$

**(d)** $y'' = \ln x$

**(e)** $y''' = x - e^{3x}$

**(f)** $y''' = x^2 + \sin x$

**(g)** $xy'' = y'$

**(h)** $y'' = \frac{y'}{x} + x$

**(i)** $xy'' - y' - x\sin\frac{y'}{x} = 0$

**(j)** $(y'')^2 = y'$

belirli integrali, sözü edilen aralıkta, integrallenebilir fonksiyonlar kümesinden gerçel sayılar kümesine bir fonksiyoneldir;

3. $Y$, herhangi $[a,b]$ aralığında sürekli türeve sahip fonksiyonlar kümesi $(C^1[a,b])$ olduğunda, her $y(x) \in Y$ için $y'(x) \in C[a,b]$ belli bir fonksiyon olduğundan,

$$U[y] = y'(x)$$

türev alma işlemi, $C^1[a,b]$'den $C[a,b]$'ye bir operatördür ($[a,b]$ yerine, $(a,b)$'de olabilir).

Benzer olarak, $p_i(x)$ katsayıları ve $y^{(n)}(x)$, herhangi $(a,b)$ aralığında sürekli fonksiyonlar olduğunda, (3) ifadesini,

$$L_n[y] \equiv \left( \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + p_2(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x) \right) y$$

şeklinde yazarsak,

$$L_n \equiv \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + p_2(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x)$$

işlemi, $C^{(n)}(a,b)$'den ($(a,b)$'de $n$. mertebeden sürekli türeve sahip fonksiyonlar kümesi) $C(a,b)$'ye bir operatördür.

$\frac{d}{dx} = D$ ile gösterirsek, $L_n$ operatörünü,

$$L_n \equiv D^n + p_1(x)D^{n-1} + p_2(x)D^{n-2} + \cdots + p_{n-1}(x)D + p_n(x)$$

$L_n[y]$ diferansiyel ifadesini ise,

$$L_n[y] \equiv \left[D^n + p_1(x)D^{n-1} + p_2(x)D^{n-2} + \cdots + p_{n-1}(x)D + p_n(x)\right] y$$

veya

$$L_n[y] \equiv D^n y + p_1(x)D^{n-1}y + p_2(x)D^{n-2}y + \cdots + p_{n-1}(x)Dy + p_n(x)y$$

şeklinde yazabiliriz.

$L_n$ operatörünün tanımından görüleceği gibi, $\forall\, y_1(x),\ y_2(x) \in C^n(a,b)$ ve $C_1, C_2 \in R$ için

$$L_n[C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)] = C_1 L_n[y_1(x)] + C_2 L_n[y_2(x)]$$

eşitliği (özelliği) doğrudur. Bu özelliğe sahip olan operatör *doğrusal operatör* diye adlandırılır.

### 3.2.2 Fonksiyonların Doğrusal Bağıntısı

$y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, herhangi $(a, b)$ aralığında tanımlı fonksiyonlar olduğunda,

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \cdots + \lambda_n y_n(x) \qquad (\forall \lambda_i \in R, i = \overline{1, n})$$

toplamına, sözü edilen *fonksiyonların doğrusal bağıntısı* denir. Örneğin, $1, x, x^2, ..., x^n$ fonksiyonlarının doğrusal bağıntısı,

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n \qquad (x \in (-\infty, \infty))$$

şeklinde yazılabilir.

**Tanım 1** $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ fonksiyonları için

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \cdots + \lambda_n y_n(x) = 0 \qquad (\forall x \in (a, b)) \qquad (4)$$

eşitliği sağlanacak şekilde, en azından biri sıfırdan farklı $\lambda_i$ sayıları $(\forall \lambda_i \in R, i = \overline{1, n})$ varsa, sözü edilen fonksiyonlara $(a, b)$ aralığında *doğrusal bağımlı fonksiyonlar* denir. (4) eşitliği yalnız $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$ olduğunda sağlanırsa, o zaman $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ fonksiyonlarına $(a, b)$ aralığında *doğrusal bağımsız fonksiyonlar* denir.

---

**ÖRNEK 1** Aşağıdaki fonksiyonların $(-\infty, \infty)$ aralığında doğrusal bağımlı olup olmadığını belirleyin.

**(a)** $\sin^2 x, \cos^2 x, 1$ **(b)** $1 = x, x^2, ..., x^n$

**(c)** $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, ..., e^{k_n x}$ (tüm $k_i$'ler $(i = \overline{1, n})$ farklı gerçel sayılardır)

**(d)** $e^{kx}, xe^{kx}, ..., x^m e^{kx}$

○ **(a)** Verilen fonksiyonlar,

$$1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x + (-1) \cdot 1 = 0 \qquad (\forall x \in (-\infty, \infty))$$

eşitliği sağlandığından doğrusal bağımlıdırlar ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$)
**(b)** Ele alınan fonksiyonların doğrusal bağıntısı için,

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n = 0 \qquad (\forall x \in (-\infty, \infty)) \qquad (5)$$

eşitliği yalnız $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ olduğunda gerçekleştiğinden bu fonksiyonlar doğrusal bağımsızdırlar. (Gerçekten, $\lambda_i$'lerden en azından biri sıfırdan farklı olsaydı, o zaman (5)'in sol tarafı, derecesi $n$'i aşmayan bir çokterimli olur ve $x$'in tüm değerlerinde değil, sonlu sayıda $(\leq n)$ noktada sıfır olurdu);

(c) Verilen fonksiyonların doğrusal bağımlı olduklarını varsayalım. Yani, en azından biri sıfırdan farklı olan $\lambda_i$ $(i = \overline{1,n})$ sayılarının,

$$\lambda_1 e^{k_1 x} + \lambda_2 e^{k_2 x} + \cdots + \lambda_n e^{k_n x} = 0 \qquad (\forall\, x \in (-\infty, \infty))$$

eşitliği sağlanacak şekilde varolduğunu kabul edelim. $\lambda_n \neq 0$ kabul eder ve eşitliğin her iki tarafını $e^{k_1 x}$'e bölüp türevini alırsak,

$$\lambda_2(k_2 - k_1)e^{(k_2-k_1)x} + \lambda_3(k_3 - k_1)e^{(k_3-k_1)x} + \cdots + \lambda_n(k_n - k_1)e^{(k_n-k_1)x} = 0$$

olur. Yeniden, son eşitliğin her iki tarafını $e^{(k_2-k_1)x}$'e bölüp türevini alalım:

$$\lambda_3(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)e^{(k_3-k_2)x} + \cdots + \lambda_n(k_n - k_1)(k_n - k_2)e^{(k_n-k_2)x} = 0$$

Benzer yolla işlemi devam ettirirsek, $(n-1)$. adımda,

$$\lambda_n(k_n - k_1)(k_n - k_2)\cdots(k_n - k_{n-1})e^{(k_n-k_{n-1})x} = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Son eşitlik, sol tarafındaki bütün çarpanları sıfırdan farklı olduğundan sağlanamaz. Demek ki, varsayımımız doğru değildir. Yani, $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}$ fonksiyonları doğrusal bağımsızdırlar;

(d) Verilen fonksiyonların doğrusal bağıntısını yazıp,

$$\lambda_0 e^{kx} + \lambda_1 x e^{kx} + \cdots + \lambda_m x^m e^{kx} = e^{kx}(\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_m x^m)$$

şeklinde dönüştürürsek, (b) seçeneğine göre onların doğrusal bağımsızlığını söyleyebiliriz. ○

---

**Uyarı 1** Açıktır ki, herhangi aralıkta doğrusal bağımlı (bağımsız) fonksiyonlar, sözü edilen aralığın her alt aralığında da doğrusal bağımlıdırlar (bağımsızdırlar).

**Uyarı 2** $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ fonksiyonları doğrusal bağımsız ise, o zaman bunların keyfi $k$ $(k < n)$ tanesi de doğrusal bağımsızdır.

**Uyarı 3** $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ fonksiyonlarından herhangi biri, örneğin $y_1(x)$, sıfır fonksiyonu ise $(y_1(x) \equiv 0)$, o zaman $\lambda_1 \neq 0$ kabul edersek,

$$\lambda_1 y_1(x) + 0 \cdot y_2(x) + \cdots + 0 \cdot y_n(x) \equiv 0 \qquad (\forall\, x \in [a,b])$$

özdeşliği doğru olur. Yani, sözü edilen fonksiyonlar daima doğrusal bağımlıdır. Bu nedenle, fonksiyonların doğrusal bağımlılığından söz edilirken bunların sıfır fonksiyonunu içermediği kabul edilir.

Fonksiyonların doğrusal bağımlı olup olmadıkları, *Wronski*[1] *determinantı (Wronskian)* adı verilen

---

[1] Jozef Maria Wronski (1778 - 1853) – Polonyalı matematikçi.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \tag{6}$$

determinantının yardımıyla kolaylıkla denetlenebilir (Wronski determinantı, $W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ şeklinde de yazılır).

**TEOREM 1** $(a, b)$ aralığında doğrusal bağımlı ve $(n-1)$. mertebeden türeve sahip $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ fonksiyonlarının Wronskianı sıfıra eşittir, yani,

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0 \qquad (\forall x \in (a, b)) \tag{7}$$

eşitliği doğrudur.

❒ Teoremin koşulları sağlandığında, (4) eşitliği sağlanacak şekilde, sıfırdan farklı en azından bir $\lambda_i$ sayısı vardır. Bunu $\lambda_1$ olarak kabul edelim (aksi takdirde yer değiştirme yapılabilir), Wronskianın birinci sütununu $\lambda_1$ ile, diğer sütunları ise sırasıyla $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ ile çarpıp birinci sütunun üzerine eklersek,

$$W(x) = \frac{1}{\lambda_1} \begin{vmatrix} \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ \lambda_1 y_1'(x) + \lambda_2 y_2'(x) + \dots + \lambda_n y_n'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \lambda_1 y_1^{(n-1)}(x) + \lambda_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + \lambda_n y_n^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

olur. Buradan, $W(x) = 0$ $(\forall x \in [a, b])$ elde edilir ((4) eşitliğine göre, birinci sütun elemanları sıfır olduğundan. Bkz. Bölüm 1.2). ❑

Teorem 1'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 1** $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ fonksiyonlarının Wronskianı, $(a, b)$ aralığının en azından bir noktasında sıfırdan farklı ise, o zaman bu fonksiyonlar sözü edilen aralıkta doğrusal bağımsızdırlar.

---

**ÖRNEK 2** 1, $\sin \beta x$, $\cos \beta x$ fonksiyonlarının doğrusal bağımlı olup olmadığını belirleyin $(\beta \neq 0)$.

○ Örneği iki yöntemle de çözelim.

**1.** En azından biri sıfırdan farklı $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sayıları için,

$$\lambda_1 + \lambda_2 \sin \beta x + \lambda_3 \cos \beta x = 0$$

eşitliği, trigonometrik denklem olduğundan, tüm $x \in (-\infty, \infty)$ için değil, yalnız onun kökleri olan $x_i$'lerde doğrudur. Yani, verilen fonksiyonlar $(-\infty, \infty)$ aralığında doğrusal bağımsızdırlar;

2. Verilen fonksiyonlar, Wronskianın $x = 0$ noktasındaki değeri,

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\beta^2 \end{vmatrix} = -\beta^3 \neq 0$$

olduğundan, Sonuç 1'e göre doğrusal bağımsızdırlar. ○

---

**ÖRNEK 3** Örnek 1'in **b** ve **c** seçeneklerini Wronski determinantının yardımıyla inceleyin.

○ Verilen fonksiyon sistemleri için, sırasıyla

$$W[1, x, x^2, \ldots, x^n] = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \\ 0 & 1 & 2x & \ldots & nx^{n-1} \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & n(n-1)x^{n-2} \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n! \end{vmatrix} = 1 \cdot 1! \cdot 2! \cdot \cdots \cdot n! \neq 0$$

$$W[e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}] = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & \ldots & e^{k_n x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & \ldots & k_n e^{k_n x} \\ . & . & \ldots & . \\ k_1^{n-1} e^{k_1 x} & k_2^{n-1} e^{k_2 x} & \ldots & k_n^{n-1} e^{k_n x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ . & . & \ldots & . \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

olduğundan, doğrusal bağımsızdırlar (son determinant, Vandermonde determinantıdır. Bkz. Bölüm 1.3). ○

---

**Uyarı 4** $n = 2$ özel durumunda, $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonların doğrusal bağımlılığı,

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0 \qquad (\forall\, x \in (a, b))$$

şeklini alır ($\lambda_1$ ve $\lambda_2$'den herhangi biri, demek ki ikisi de sıfırdan farklıdır). Buradan,

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \qquad \text{yani} \qquad \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = C \quad (\forall x \in (a,b))$$

olur. Böylece, *doğrusal bağımlı iki fonksiyonun oranı sabittir* sonucuna varırız. Buradan, *oranı sabit olmayan iki fonksiyon doğrusal bağımsızdır* önermesi elde edilir. Örneğin, $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonları, $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \neq sb$ olduğundan doğrusal bağımsız, $e^{kx}$ ve $\lambda e^{kx}$ $(\forall \lambda \in R, \lambda \neq 0)$ fonksiyonları ise $\frac{\lambda e^{kx}}{e^{kx}} = \lambda = sb$ olduğundan doğrusal bağımlıdırlar.

### 3.2.3 Doğrusal Türdeş Denklemin Çözümünün Özellikleri

(2) denkleminin $p_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ katsayılarının herhangi $(a,b)$ aralığında sürekli fonksiyonlar olduğunu kabul edelim.

**TEOREM 2** Doğrusal türdeş $n$. mertebeden diferansiyel denklemin doğrusal bağımsız $n$ sayıda çözümü vardır $(a < x < b)$.

❒ Varlık ve teklik teoremine göre, (2) denkleminin, $\forall x_0 \in [a,b]$ için sırasıyla,

$$y_1(x_0) = 1,\ y_1'(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$$

$$y_2(x_0) = 0,\ y_2'(x_0) = 1,\ \ldots,\ y_2^{(n-1)}(x_0) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n(x_0) = 0,\ y_n'(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_n^{(n-1)}(x_0) = 1$$

başlangıç koşullarını sağlayan, $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ olmak üzere $n$ sayıda çözümünün varlığı kuşkusuzdur. Bu fonksiyonların Wronskianı $x_0$ noktasında $W(x_0) = 1 \neq 0$ olduğundan, Sonuç 1'e göre bu çözümler doğrusal bağımsızdır. ❒

**TEOREM 3** Doğrusal türdeş $n$. mertebeden diferansiyel denklemin $(a,b)$ aralığında doğrusal bağımsız $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ çözümlerinin Wronskianı daima sıfırdan farklıdır.

❒ Tersini varsayalım. (2) denkleminin $[a,b]$ aralığında bağımsız $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ çözümlerinin Wronskianının herhangi $x_0 \in (a,b)$ noktasında sıfır olduğunu ($W(x_0) = 0$) varsayalım. O zaman $\lambda_i$ sayılarını,

$$\lambda_1 y_1(x_0) + \lambda_2 y_2(x_0) + \cdots + \lambda_n y_n(x_0) = 0$$

$$\lambda_1 y_1'(x_0) + \lambda_2 y_2'(x_0) + \cdots + \lambda_n y_n'(x_0) = 0 \tag{7}$$

.....

$$\lambda_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \lambda_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + \lambda_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

türdeş sisteminin sıfırdan farklı çözümü olarak seçip ($W(x_0) = 0$ olduğundan, böyle çözüm vardır. Bkz. Bölüm 1.5), (2) denkleminin

$$y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \cdots + \lambda_n y_n(x) \tag{8}$$

çözümünü yazabiliriz. (7) sistemine göre bu çözüm,

$$y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

başlangıç koşullarını sağlar. Yani açık çözümdür ($y(x) \equiv 0$). Bu ise $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ çözümlerinin doğrusal bağımsızlığına aykırıdır. Çelişkinin nedeni varsayımın yanlışlığıdır. ❑

**TEOREM 4** $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında (2) denkleminin doğrusal bağımsız çözümleri ise, keyfi $C_1, C_2, ..., C_n$ sabitleri için,

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) \tag{9}$$

fonksiyonu, sözü edilen denklemin genel çözümüdür.

❒ (9) eşitliğiyle belirlenen $y(x)$ fonksiyonunun (2) denklemini sağladığı ve $n$ sayıda keyfi sabite bağlı olduğu açıktır.

Şimdi, her

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (\forall x_0 \in (a, b)) \tag{10}$$

başlangıç koşulları için $C_1, C_2, ..., C_n$ sabitlerinin tek değerli olarak belirlenebildiğini gösterelim. Bunun için, (9) eşitliğinde başlangıç koşullarını göz önüne alırsak, $C_i$'lere $(i = \overline{1, n})$ göre,

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \cdots + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \cdots + C_n y_n'(x_0) = y_0' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

sistemini elde ederiz. $W(x_0) \neq 0$ olduğundan, bu sistemin tek çözümü vardır. Demek ki, (9) eşitliğiyle belirlenen fonksiyon (2) denkleminin genel çözümüdür. ❑

**Uyarı 5** Teorem 4'ten görüleceği gibi, doğrusal türdeş $n$. mertebeden diferansiyel denklemin, bağımsız çözümleri sayısı $n$ 'dir. Bu $n$ sayıda bağımsız çözümün yardımıyla, $n$ sayıda olmak üzere doğrusal bağımsız çözümler de oluşturulabilir. Örneğin, $y_1(x) = e^{-x}$ ve $y_2(x) = e^x$ fonksiyonları, $y'' - y = 0$ denkleminin bağımsız çözümleridir. Bu fonksiyonların yardımıyla oluşturulan bütün $\sinh x$ ve $\cosh x$, $a \sinh x$ ve $b \cosh x$ vb. çiftleri de bağımsız çözümlerdir.

**Tanım 2** Doğrusal türdeş $n$. mertebeden denklemin $n$ sayıda keyfi bağımsız çözümüne onun *temel çözümler sistemi* denir. Temel çözümler sistemini $y_1(x)$, $y_2(x),..., y_n(x)$ ile göstereceğiz.

Örneğin, $y_1(x) = \sin x$ ve $y_2(x) = \cos x$ fonksiyonları $y'' + y = 0$ denkleminin, $y_1(x) = 1$ ve $y_2(x) = x^2$ fonksiyonları ise $xy'' - y' = 0$ denkleminin temel çözümler sistemidir ve bunların genel çözümleri sırasıyla

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x \qquad \text{ve} \qquad y(x) = C_1 + C_2 x^2$$

şeklindedir (sözü edilen fonksiyonların doğrusal bağımsızlığı açıktır).

**Uyarı 6** Herhangi bir aralıkta, $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ temel çözümler sistemi belli olan $n$. mertebeden doğrusal denklem,

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) & y'(x) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0 \qquad (11)$$

eşitliğiyle oluşturulabilir (burada, $y = y(x)$ bilinmeyen fonksiyondur).

Gerçekten, $W[y_1, y_2, ..., y_n] \neq 0$ olduğundan, (11) eşitliğinin, $y(x)$ bilinmeyenine göre $n$. mertebeden doğrusal denklem olduğu ve $y = y_i(x)$ fonksiyonlarının bu denklemi sağladığı açıktır $(i = \overline{1, n})$.

---

**ÖRNEK 4** Temel çözümler sistemi aşağıda verilen diferansiyel denklemleri bulun.

**(a)** $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$ **(b)** $y_1(x) = x$, $y_2(x) = e^x$

○ **(a)** (11) eşitliğine göre,

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x & y \\ -\sin x & \cos x & y' \\ -\cos x & -\sin x & y'' \end{vmatrix} = 0$$

yazıp sol taraftaki determinantı hesaplarsak,

$$y'' + y = 0$$

denklemini elde ederiz;

**(b)** Yine (11) denklemine göre,

$$\begin{vmatrix} x & e^x & y \\ 1 & e^x & y' \\ 0 & e^x & y'' \end{vmatrix} = 0$$

yazıp, aranan denklemi,

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0$$

olarak buluruz. ○

---

Teorem 4'ten ve söylenenlerden görüleceği gibi, *türdeş doğrusal n. mertebeden diferansiyel denklemin genel çözümünü bulmak için onun herhangi bir temel çözümler sistemini bulup bunların doğrusal bağıntısını oluşturmak yeterlidir.* Değişken katsayılı gerek ikinci, gerekse de yüksek mertebeden doğrusal türdeş denklemlerin temel çözümler sisteminin bulunması için genel bir yöntemin olmadığı gerçeğinin ve böyle bir yöntemi bulmanın olanaksızlığının altını çizelim. (Ancak, denklem sabit katsayılı olduğunda, böyle genel yöntem vardır. Bkz. Bölüm 3.4). Buna rağmen, bazı özel durumlar söz konusudur. Örneğin, (1) denkleminin $y_1(x)$ $(\neq 0)$ olmak üzere herhangi bir özel çözümü belli olduğunda, $y = y_1(x)z(x)$ yerine koymasının yardımıyla denklem, $z(x)$ bilinmeyen fonksiyonuna göre $(n-1)$. mertebeden doğrusal türdeş diferansiyel denkleme indirgenebilir. Ayrıca, $n = 2$ durumunda $y_1(x)$ fonksiyonu,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{12}$$

denkleminin sıfırdan farklı bir çözümü ise, o zaman ikinci özel çözüm,

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} dx \tag{13}$$

formülüyle bulunabilir.

Gerçekten,

$$y = y_1 z, \qquad y' = y_1' z + y_1 z', \qquad y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''$$

olduğunu (12) denkleminde yazıp $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$ olduğunu göz önüne alırsak,

$$y_1 z'' + [p(x)y_1 + 2y_1']z' = 0$$

olur. Burada $z'(x) = u(x)$ kabul edersek $(z''(x) = u'(x))$,

$$y_1 u' + [p(x)y_1 + 2y_1']u = 0$$

yani değişkenleri ayrılabilir denklem elde ederiz. Bunu belli yöntemle, aşağıdaki şekilde çözelim (bkz. Bölüm 2.4):

$$\frac{du}{u} + \left[p(x) + \left(\ln y_1^2(x)\right)'\right]dx = 0$$

$$\ln u - \ln C_1 = -\int p(x)dx - \ln y_1^2(x)$$

$$y_1^2(x)u = C_1 e^{-\int p(x)dx} \quad \text{veya} \quad u = \frac{C_1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx}$$

Son eşitlikte $u = z'$ olduğunu göz önüne alırsak,

$$dz = \frac{C_1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} dx$$

olur ve buradan,

$$z = C_1 \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} dx + C_2$$

bulunur. Burada $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ kabul edersek (özel çözüm arandığından),

$$z = \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} dx$$

olur. Bulunan $z$'yi $y = y_1(x)z(x)$ yerine koymasında yazdığımızda, (13) formülü elde edilir.

---

**ÖRNEK 5** $(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ denkleminin $y_1(x) = x$ özel çözümü bilindiğinde diğer özel çözümünü ve genel çözümünü bulun.

○ Denklemi (12) şekline dönüştürüp,

$$y_1(x) = x, \quad p(x) = \frac{2x}{1 + x^2}, \quad \int p(x)dx = \int \frac{2x}{1 + x^2} dx = \ln(1 + x^2) + C$$

olduğunu ($C = 0$ alalım) (13) formülünde göz önüne alırsak, ikinci özel çözümü,

$$y_2(x) = x \int \frac{1}{x^2} e^{-\ln(1+x^2)} dx = x \int \frac{dx}{x^2(1 + x^2)} =$$

$$x\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = x\left(-\frac{1}{x}-\arctan x\right)$$

yani,

$$y_2(x) = -1 - x\arctan x$$

olarak buluruz (özel çözüm arandığından, integral sabitini sıfır aldık).
Özel çözümleri göz önüne alıp genel çözümü,

$$y = C_1x + C_2(1 + x\arctan x)$$

şeklinde yazabiliriz. ○

---

İleride kullanacağımız bir teoremi daha verelim.

**TEOREM 5** Gerçel değişkenli

$$y(x) = u(x) + iv(x)$$

fonksiyonu, gerçel katsayılı

$$L_n[y] = 0$$

denkleminin çözümü ise, o zaman $u(x)$ ve $v(x)$ gerçel fonksiyonları da sözü edilen denklemin çözümleridir.

---

❑ $y(x) = u(x) + iv(x)$ fonksiyonu $L_n[y] = 0$ denkleminin çözümü ise, o zaman,

$$L_n[u(x) + iv(x)] = 0 \quad \text{veya} \quad L_n[u(x)] + iL_n[v(x)] = 0$$

olacağı açıktır. Son eşitlikten, karmaşık sayıların eşitlik kuralına göre,

$$L_n[u(x)] = 0 \quad \text{ve} \quad L_n[v(x)] = 0$$

elde ederiz. Yani, $u(x)$ ve $v(x)$ gerçel fonksiyonları da ele alınan denklemin çözümleridir. ❐

Örneğin, $y = e^x(\cos 2x + i\sin 2x)$, yani $y = e^x\cos 2x + ie^x\sin 2x$ karmaşık fonksiyonu,

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

denklemini sağladığından, Teorem 5'e göre $y_1 = e^x\cos x$ ve $y_2 = e^x\sin x$ fonksiyonları da onun çözümleridir ve genel çözüm,

$$y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$$

şeklindedir.

**ALIŞTIRMALAR (Bölüm 3.2 için)**

1. Aşağıda verilen fonksiyonların tanım bölgelerinde doğrusal bağımlı olup olmadıklarını inceleyin.

(a) $x$, $\sin x$ (b) $x$, $\ln x$ (c) $\sin x$, $3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

(d) $\cosh x$, $\sinh x$ (e) $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$

(f) $1$, $x$, $e^x$ (g) $1$, $\cos x$, $e^x$

2. Temel çözümler sistemi aşağıda verilen diferansiyel denklemleri bulun ve genel çözümlerini yazın.

(a) $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^x$ (b) $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$

(c) $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ (d) $y_1 = x^3$, $y_2 = x^4$

(e) $y_1 = x$, $y_2 = \sin x$ (f) $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$ $y_3 = \sin x$

3. Bir özel çözümü belli olan aşağıdaki denklemlerin ikinci özel çözümlerini ve genel çözümlerini bulun.

(a) $y'' + 2y' - 3y = 0$, $y_1 = e^x$

(b) $y'' + 4y' + 3y = 0$, $y_1 = e^{-x}$

(c) $xy'' + 2y' + xy = 0$, $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$

(d) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1 = x$

## 3.3 SABİT KATSAYILI TÜRDEŞ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

### 3.3.1 Genel Açıklama

$p_i$ $(i = \overline{1, n})$ katsayıları sabit sayılar olduğunda,

$$L_n[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_n y = 0$$

$$(-\infty < x < \infty) \tag{1}$$

denklemine, *sabit katsayılı n. mertebeden doğrusal türdeş diferansiyel denklem* denir.

Bölüm 3.2'deki açıklamalardan görüleceği gibi, (1) denkleminin $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ olmak üzere bir temel çözüm sistemi vardır ve genel çözümü

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) \tag{2}$$

2. **Karakteristik denklemin kökleri karmaşıktır** ($k_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \Delta < 0$, $\alpha = -p/2, \beta = \sqrt{4q - p^2}/2$). Bu durumda,

$$e^{(\alpha+i\beta)x} \quad \text{ve} \quad e^{(\alpha-i\beta)x}$$

yani (bkz. 2, Bölüm 8.14),

$$e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x \quad \text{ve} \quad e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

karmaşık fonksiyonlarının (1*) denkleminin özel çözümleri olacağı açıktır. Bölüm 3.3'teki Teorem 5'e göre, bu fonksiyonların gerçel ve sanal kısımlarını oluşturan

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{ve} \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{7}$$

fonksiyonları da (1*) denkleminin özel (bağımsız) çözümleridir. Bu yüzden, ele alınan durumda (1*) denkleminin genel çözümü

$$y = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{8}$$

yani

$$y = (C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}$$

olarak yazılabilir.

---

**ÖRNEK 2** Aşağıda verilen denklemleri çözün.

**(a)** $y'' - 2y' + 5y = 0$ **(b)** $y'' + 9y = 0$

○ **(a)** Karakteristik denklemin ve köklerinin

$$k^2 - 2k + 5 = 0, \qquad k_{1,2} = 1 \pm 2i \qquad (\alpha = 1, \beta = 2)$$

olduğu açıktır. Bu yüzden, (7) ve (8) eşitliklerine göre, sırasıyla özel çözümler

$$y_1(x) = e^x\cos 2x, \qquad y_2(x) = e^x\sin 2x,$$

genel çözüm ise,

$$y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$$

olarak bulunur;

**(b)** Benzer biçimde,

$$k^2 + 9 = 0, \quad k_{1,2} = \pm 3i \quad (\alpha = 0, \beta = 3)$$

olduğundan, özel çözümler

$$y_1(x) = \cos 3x, \qquad y_2(x) = \sin 3x,$$

genel çözüm ise,

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

olur. ○

---

3. **Karakteristik denklemin kökleri çakışıktır** $(k_1 = k_2 = k = -p/2,$ $\Delta = 0)$. Bu durumda, $y_1(x) = e^{kx}$'in (1*) denkleminin özel çözümü olduğu açıktır. Bağımsız ikinci özel çözümü,

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = u(x) \qquad \text{yani} \qquad y_2(x) = u(x)e^{kx}$$

şeklinde arayıp $u(x)$'i belirleyelim. Bunun için, $y_2(x)$ ve

$$y_2'(x) = u'(x)e^{kx} + ku(x)e^{kx}$$

$$y_2''(x) = u''(x)e^{kx} + 2ku'(x)e^{kx} + k^2u(x)e^{kx}$$

ifadelerini (1*) denkleminde yazarak gruplama yapalım:

$$u''(x)e^{kx} + 2ku'(x)e^{kx} + k^2u(x)e^{kx} + pu'(x)e^{kx} + pku(x)e^{kx} + qu(x)e^{kx} = 0$$

$$e^{kx}\left[u''(x) + (p + 2k)u'(x) + (k^2 + pk + q)u(x)\right] = 0$$

Burada, $e^{kx} \neq 0$ ve $k$'nin karakteristik denklemin çakışık kökü olduğunu $(k^2 + pk + q = 0, p + 2k = 0)$ göz önüne alırsak,

$$u''(x) = 0$$

buradan da,

$$u(x) = ax + b$$

elde ederiz. Son eşitlikte $a = 1$, $b = 0$ kabul edersek, $u(x) = x$ olur (özel çözüm arandığından, $a$ ve $b$'yi keyfi seçebiliriz) ve bağımsız ikinci özel çözümü

$$y_2(x) = xe^{kx}$$

olarak buluruz.

Böylece, köklerin çakışık olduğu durumda özel çözümler,

$$y_1(x) = e^{kx} \qquad \text{ve} \qquad y_2(x) = xe^{kx} \tag{9}$$

genel çözüm ise,

$$y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx} \qquad \text{yani} \qquad y = (C_1 + C_2x)e^{kx} \tag{10}$$

olarak bulunur.

**Uyarı** $y_2(x) = xe^{kx}$ özel çözümü, Bölüm 3.2'deki (13) formülünün yardımıyla da bulunabilir. Bunu okuyuculara bırakıyoruz.

---

**ÖRNEK 3** $y'' + 4y' + 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$ problemini çözün.

○ Önce, ele alınan denklemin genel çözümünü bulalım. Karakteristik denklem ve kökleri,

$$k^2 + 4k + 4 = 0, \quad k_{1,2} = -2$$

olduğundan, özel çözümler

$$y_1(x) = e^{-2x} \quad \text{ve} \quad y_2(x) = xe^{-2x}$$

genel çözüm ise,

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$$

olur.

Şimdi, başlangıç koşullarını kullanarak $C_1$ ve $C_2$'yi bulalım:

$$y(0) = e^0(C_1 + C_2 \cdot 0) \Rightarrow 1 = C_1 \Rightarrow C_1 = 1$$

$$y'(0) = C_2 - 2C_1 \Rightarrow$$
$$C_2 - 2 = -1 \Rightarrow C_2 = 1$$

Bulunan değerleri genel çözümün ifadesinde yazarsak, aranan özel çözümü,

$$y = (1 + x)e^{-2x}$$

olarak buluruz. ○

---

Elde edilen sonuçlardan görüleceği gibi, (1*) denkleminin çözümü, aşağıdaki aşamalarla gerçekleştirilir.

**1. Aşama** $k^2 + pk + q = 0$ karakteristik denklemi yazılır;
**2. Aşama** Karakteristik denklemin, $k_1$ ve $k_2$ olmak üzere kökleri bulunur;
**3. Aşama** Köklerin türüne bağlı olarak, özel çözümler yazılır ve genel çözüm:

1. $k_1 \neq k_2$ gerçel sayılar olduğunda, $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2. $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ karmaşık sayılar olduğunda, $y = (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)\, e^{\alpha x}$
3. $k_1 = k_2 = k$ çakışık olduğunda, $y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}$

şeklinde bulunur.

### 3.3.3 Yüksek Mertebeden Denklemler

$n > 2$ kabul edip (1) denklemini ve bunun (4) karakteristik denklemini göz önüne alalım. $n = 2$ durumuna benzer şekilde, $n > 2$ durumu için, karakteristik denklemin köklerinin türüne bağlı olarak özel çözümlerin nasıl bulunacağı aşağıdaki gibi açıklanabilir.

1. **Karakteristik denklemin kökleri (gerçel veya karmaşık) farklıdır** Bu durumda, tüm gerçel $k_l$ $(l \leq n)$ köklerine karşılık, $e^{k_l x}$ özel çözümleri, karmaşık $\alpha_s \pm i\beta_s$ $(2s \leq n)$ köklerine karşılık ise, çifte $e^{\alpha_s x}\cos\beta x$ ve $e^{\alpha_s x}\sin\beta x$ özel çözümleri yazılır $(l + 2s = n)$ ve

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

genel çözümü oluşturulur.

---

**ÖRNEK 4** Aşağıdaki denklemleri çözün.

**(a)** $y''' + 4y'' + 14y' + 20y = 0$ **(b)** $y^{(5)} - 16y' = 0$

○ **(a)** Karakteristik

$$k^3 + 4k^2 + 14k + 20 = 0$$

denklemini yazınca, $-2$ sayısının (bağımsız terimin böleni) bunun kökü olduğunu görüyoruz (demek ki, denklemin sol tarafındaki dört terimli $k + 2$'ye bölünür). Bu yüzden denklemi

$$(k + 2)(k^2 + 2k + 10) = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan,

$$k + 2 = 0 \qquad \text{ve} \qquad k^2 + 2k + 10 = 0$$

ve sonuçta $k_1 = -2, k_{2,3} = -1 \pm 3i$ elde ederiz. Bunları göz önüne alırsak, özel çözümleri

$$y_1(x) = e^{-2x}, \qquad y_2(x) = e^{-x}\cos 3x, \qquad y_3(x) = e^{-x}\sin 3x$$

şeklinde, genel çözümü ise

$$y = C_1 e^{-2x} + (C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x)e^{-x}$$

olarak buluruz;

**(b)** $k^5 - 16k = 0$ karakteristik denklemini,

$$k(k^4 - 16) = 0 \Rightarrow k(k^2 - 4)(k^2 + 4) = 0 \Rightarrow k(k + 2)(k - 2)(k^2 + 4) = 0$$

şeklinde dönüştürerek,

$$k_1 = 0, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 2, \quad k_{4,5} = \pm 2i \quad (\alpha = 0, \beta = 2)$$

buluruz. Bunları göz önüne aldığımızda, özel çözümler,

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = e^{-2x}, \quad y_3(x) = e^{2x}, \quad y_4(x) = \cos 2x, \quad y_5(x) = \sin 2x$$

genel çözüm ise,

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{2x} + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x$$

olur. ○

---

2. **Karakteristik denklemin tekrarlı kökleri vardır** Bu durumda, Bölüm 3.3.2'nin **c** seçeneğine benzer yolla, $m$ $(m \leq n)$ defa tekrarlanan $\tilde{k}$ köküne,

$$e^{\tilde{k}x}, \; xe^{\tilde{k}x}, \ldots, \; x^{m-1}e^{\tilde{k}x}$$

olmak üzere $m$ sayıda özel çözümün, $s$ defa tekrarlanan $\alpha \pm i\beta$ karmaşık köküne ise $(2s \leq n)$

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \; e^{\alpha x}\sin\beta x, \; xe^{\alpha x}\cos\beta x, \; xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \; x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

olmak üzere $2s$ sayıda özel çözümün karşı geldiği gösterilebilir.

Aynı şekilde, diğer tekrarlanan köklere (eğer varsa) karşılık özel çözümler ve tüm tekrarsız köklere karşılık özel çözümler yazılır ve genel çözüm oluşturulur.

---

**ÖRNEK 5** Aşağıdaki denklemleri çözün.

**(a)** $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ **(b)** $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0$

**(c)** $y^{(5)} - y^{(4)} + 2y''' - 2y'' + y' - y = 0$ **(d)** $y^{(6)} + y^{(4)} = 0$

○ **(a)** Karakteristik denklemin

$$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 0 \quad \text{yani} \quad (k+1)^3 = 0$$

olduğu açıktır. Demek ki, $k = -1$ sayısı karakteristik denklemin üç kere tekrarlanan $(m = 3)$ köküdür. Bu nedenle, özel çözümler

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = xe^{-x}, \quad y_3(x) = x^2e^{-x}$$

şeklinde yazılabilir ve genel çözüm

$$y(x) = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{-x}$$

olur;

**(b)** Karakteristik denklemin

$$k^4 + 2k^3 + k^2 = 0 \quad \text{yani} \quad k^2(k+1)^2 = 0$$

köklerinin ise, $k_{1,2} = 0$, $k_{3,4} = -1$ olduğu açıktır (her iki kök iki kere tekrarlanır). Bu yüzden özel çözümler,

$$y_1(x) = 1, \qquad y_2(x) = x, \qquad y_3(x) = e^{-x}, \qquad y_4(x) = xe^{-x}$$

olarak yazılabilir ve genel çözüm

$$y = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x)e^{-x}$$

olur;

**(c)** Benzer biçimde,

$$k^5 - k^4 + 2k^3 - 2k^2 + k - 1 = 0$$

yazarsak, 1 sayısının (bağımsız terimin böleni) denklemi sağladığını görürüz. Bu nedenle denklemi,

$$(k-1)(k^4 + 2k^2 + 1) = 0 \quad \text{yani} \quad (k-1)(k^2+1)^2 = 0$$

şeklinde yazıp, $k_1 = 1$, $k_{2-5} = \pm i$ elde ederiz (her iki karmaşık kök iki kere tekrarlanır).

Sonuçları göz önüne alıp, özel çözümleri

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = \cos x, \quad y_3(x) = x\cos x, \quad y_4(x) = \sin x, \quad y_5(x) = x\sin x$$

genel çözümü ise,

$$y = C_1e^x + (C_2 + C_3x)\cos x + (C_4 + C_5x)\sin x$$

olarak buluruz;

**(d)** Yine,

$$k^6 + k^4 = 0 \quad \text{yani} \quad k^4(k^2+1) = 0$$

yazıp $k_{1-4} = 0$ $(m = 4)$, $k_{5,6} = \pm i$ olarak buluruz. Böylece özel çözümler

$$y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x,\ y_3(x) = x^2,\ y_4(x) = x^3,\ y_5(x) = \cos x,\ y_6(x) = \sin x$$

genel çözüm ise,

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5\cos x + C_6\sin x$$

olur. ○

İkinci mertebeden denklemlerin çözümü için yukarıda açıklanan aşamalar, yüksek mertebeden denklemler için de geçerlidir.

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 3.3 için)

1. Karakteristik denkleminin kökleri aşağıda verilen, sabit katsayılı diferansiyel denklemleri ve genel çözümlerini yazın.

   (a) $k_1 = 1,\ k_2 = 3$ (b) $k_1 = 0,\ k_2 = 4$

   (c) $k_1 = -3,\ k_2 = 2$ (d) $k_1 = k_2 = 2$

   (e) $k_{1,2} = 3 \pm i$ (f) $k_{1,2} = \pm 3i$

2. Aşağıda verilen diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini bulun.

   (a) $y'' + 3y' - 4y = 0$ (b) $y'' - 3y' - 4y = 0$

   (c) $y'' + 2y' - y = 0$ (d) $y'' + 6y' + 9y = 0$

   (e) $y'' - 8y' + 16y = 0$ (f) $y'' + 3y' + 4y = 0$

   (g) $4y'' - 8y' + 5y = 0$ (h) $y'' + 4y' + 5y = 0$

   (i) $y''' + 5y'' - 8y' + 2y = 0$ (j) $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$

   (k) $y^{(4)} - 3y'' - 4y = 0$ (l) $y^{(4)} + 6y'' + 9y = 0$

   (m) $y^{(5)} + 2y^{(4)} + y''' = 0$ (n) $y^{(4)} - y = 0$

   (o) $y^{(4)} + y = 0$ (p) $y^{(6)} - 3y^{(5)} + 3y^{(4)} - y''' = 0$

   (r) $y^{(6)} - 2y^{(5)} + 3y^{(4)} - 4y''' + 3y'' - 2y' + y = 0$

3. Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün.

   (a) $y'' - 4y' + 3y = 0,\ y(0) = 6, y'(0) = 10$

   (b) $y'' - 2y' + y = 0,\ y(2) = 1, y'(2) = -2$

   (c) $y'' - 5y' + 4y = 0,\ y(0) = y'(0) = 1$

   (d) $y'' + 4y' + 29y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 15$

   (e) $y''' + y' = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -1$

   (f) $y''' - y' = 0,\ y(0) = 3, y'(0) = -1, y''(0) = 1$

4. $y'' + \omega^2 y = 0$ denkleminin genel çözümünün $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ şeklinde yazılabileceğini gösterin ( $A$ ve $\varphi$, keyfi sabitlerdir).

## 3.4 TÜRDEŞ OLMAYAN YÜKSEK MERTEBEDEN DOĞRUSAL DENKLEMLER. SABİTLERİN DEĞİŞTİRİLMESİ YÖNTEMİ

### 3.4.1 Genel Açıklama

Türdeş olmayan $n$. mertebeden,

$$L_n[y] = f(x) \text{ yani}$$

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \tag{1}$$

doğrusal denklemini ele alalım. Burada $p_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ ve $f(x)$, herhangi $(a,b)$ aralığında belli, sürekli fonksiyonlardır.

(1) denklemine karşılık gelen türdeş denklemin, yani,

$$L_n[y] = 0 \tag{2}$$

denkleminin temel çözümler sisteminin $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ olduğunu kabul edelim. O zaman (2) denkleminin genel çözümünün,

$$y_T = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x) \tag{3}$$

olacağı açıktır.

(1) denkleminin herhangi bir özel çözümü $(\tilde{y}(x))$ belli olduğunda (yani, $L_n[\tilde{y}] = f(x)$ olduğunda), denklemin genel çözümünün $(y(x))$ yapısıyla ilgili aşağıdaki teorem doğrudur.

**TEOREM** Türdeş olmayan (1) doğrusal denkleminin genel çözümü $(y(x))$, ona karşılık gelen (2) türdeş denkleminin genel çözümü $(y_T(x))$ ile kendisinin herhangi bir özel çözümünün $(\tilde{y}(x))$ toplamına eşittir, yani,

$$y(x) = y_T(x) + \tilde{y}(x) \tag{4}$$

eşitliği doğrudur.

❒ Gerçekten, teoremin koşullarına göre,

$$L_n[y_T] = 0 \quad \text{ve} \quad L_n[\tilde{y}] = f(x)$$

olduğunu ve $L_n$ operatörünün doğrusallığını göz önüne alırsak,

$$L_n[y(x)] = L_n[y_T(x) + \tilde{y}(x)] = L_n[y_T(x)] + L_n[\tilde{y}(x)] \equiv f(x)$$

yani,

$$L_n[y(x)] \equiv f(x)$$

elde ederiz. Demek ki, $y(x)$ fonksiyonu (1) denklemini sağlar.

$$y = y_T + \tilde{y} \qquad \text{yani} \qquad y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) + \tilde{y}(x)$$

fonksiyonunun, $n$ sayıda sabite bağlılığını ve her

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

başlangıç koşulları için, $C_i$ sabitlerinin $(i = \overline{1,n})$ tek değerli olarak belirlenebilirliğini (bkz. Bölüm 3.2 Teorem 3) göz önüne aldığımızda, (4) eşitliğiyle belirlenen fonksiyon (1) denkleminin genel çözümüdür sonucuna varırız. ❑

Örneğin, türdeş kısmının temel çözümler sistemi $y_1(x) = x^3, y_2(x) = x^4$ olan $x^2 y'' - 6xy' + 12y = 6x$ denkleminin (bkz. Bölüm 3.2'de Alıştırma 2 **d**) bir özel çözümü $\tilde{y} = x$ olduğundan, genel çözümü,

$$y(x) = C_1 x^3 + C_2 x^4 + x$$

olarak bulunur ($\tilde{y} = x$ özel çözümü, denemeyle belirlenir).

Genelde, deneme yoluyla özel çözümün bulunması zorluk çıkardığından (çoğu durumda, deneme yoluyla özel çözümü bulmak olanaksızdır), türdeş kısmının temel çözümler sistemi belli olan denklemin genel çözümünü bulmak için kesin bir yönteme gereksinim vardır. Bu tür yöntemlerden birini açıklayalım.

### 3.4.2 İkinci Mertebeden Denklemler için Sabitlerin Değiştirilmesi Yöntemi

İkinci mertebeden,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{1*}$$

denklemini $(n = 2)$ ele alıp, *sabitlerin değiştirilmesi yöntemi* denen ve yapısı aşağıda açıklanan yöntemi uygulayalım.

Önce,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2*}$$

türdeş denklemini yazıp bunun temel çözümler sisteminin $y_1(x), y_2(x)$ olduğunu düşünürsek, genel çözümü

$$y_T = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{5}$$

olur.

Şimdi, $C_1$ ve $C_2$ parametrelerinin (sabitlerinin) $x$'e bağlı olduğunu düşünüp ($C_1(x)$ ve $C_2(x)$), bunları

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \tag{6}$$

fonksiyonu (1*) denklemini sağlayacak şekilde seçelim. Bunun için önce, $y'$ ve $y''$ 'yü (6) eşitliğinden aşağıdaki kuralla bulalım:

$$y' = C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) \tag{7}$$

Burada,

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \tag{8}$$

kabul edelim ((6) eşitliği, (1*) denkleminde göz önüne alındığında, $C_1(x)$ ve $C_2(x)$ bilinmeyenlerini belirlemek için bir tane eşitlik elde edilir. Ancak iki bilinmeyeni de belirlemek için bir koşul daha gerekir. Bu yüzden, ikinci koşul olarak (8) eşitliği kabul edilir). O zaman (7) eşitliği

$$y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) \tag{7*}$$

şeklini alır. Her iki tarafın türevini alırsak,

$$y'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2''(x) \tag{9}$$

buluruz.

(6), (7*) ve (9) ifadelerini (1*) denkleminde yazıp $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ 'in (2*) denkleminin çözümleri olduğunu göz önüne alırsak,

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) +$$

$$p(x)[C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y'(x)] + q(x)[C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)] = f(x)$$

veya

$$C_1(x)[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + C_2(x)[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] +$$

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x)$$

ve sonuçta

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \tag{10}$$

eşitliğini elde ederiz.

Böylece, $C_1(x)$ ve $C_2(x)$ bilinmeyenlerini belirlemek için, (8) ve (10) denklemlerinden oluşan

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases} \tag{11}$$

sistemini elde ederiz. Bu sistemin temel determinantı

$$\Delta(x) = W(x) = W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\forall x \in (a,b))$$

olduğundan, tek çözümü vardır (bkz. Bölüm 1.5) ve bu çözüm

$$C_1'(x) = -\frac{f(x)y_2(x)}{W(x)}, \quad C_2'(x) = \frac{f(x)y_1(x)}{W(x)}$$

eşitlikleriyle belirlenir. Son eşitliklerde her bir denklem için iki tarafın da integralini alırsak,

$$C_1(x) = C_1^{\circ} - \int \frac{f(x)y_2(x)}{W(x)}dx, \quad C_2(x) = C_2^{\circ} - \int \frac{f(x)y_1(x)}{W(x)}dx \tag{12}$$

olur.

Bulunan $C_1(x)$ ve $C_2(x)$'i (6) eşitliğinde yazıp (1*) denkleminin genel çözümünü

$$y(x) = C_1^{\circ}y_1(x) + C_2^{\circ}y_2(x) - y_1(x)\int \frac{f(x)y_2(x)}{W(x)}dx + y_2(x)\int \frac{f(x)y_1(x)}{W(x)}dx \tag{13}$$

olarak buluruz.

(13) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk iki toplananın oluşturduğu fonksiyonun (2*) denkleminin genel çözümü olduğunu ve (4) eşitliğini göz önüne alırsak, diğer iki toplananın oluşturduğu

$$\tilde{y}(x) = -y_1(x)\int \frac{f(x)y_2(x)}{W(x)}dx + y_2(x)\int \frac{f(x)y_1(x)}{W(x)}dx \tag{14}$$

fonksiyonunun (1*) denkleminin bir özel çözümü olduğunu söyleyebiliriz.

Örnek çözümünde, (13) formülü doğrudan uygulanabilir veya yukarıda açıklanan süreç tekrarlanabilir.

**Uyarı 1** Doğrusal denklem

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \qquad (a_0(x) \neq 0)$$

genel şeklinde verildiğinde, (11) denkleminde (aynı zamanda (12) sisteminde), $f(x)$ yerine $f(x)/a_0(x)$ almak, ya da önce denklemi

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y' + \frac{a_2(x)}{a_0(x)}y = \frac{f(x)}{a_0(x)}$$

şekline dönüştürmek gerekir (bkz. Örnek 1*b*).

---

**ÖRNEK 1** Aşağıdaki denklemlerin genel çözümlerini bulun.

**(a)** $y'' + y = \sec x$ **(b)** $x^2y'' - 6xy' + 12y = (x+1)^2$

○ **(a)** Önce, denklemin türdeş kısmının temel çözümler sistemini ve genel çözümünü bulalım:

$$y'' + y = 0$$

$$k^2 + 1 = 0, \qquad k_{1,2} = \pm i$$

$$y_1(x) = \cos x, \qquad y_2(x) = \sin x$$

$$y_T = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$C_1$ ve $C_2$ parametrelerini $x$'e bağlı yani $C_1(x)$ ve $C_2(x)$ olarak kabul edip son eşitliği

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x \qquad (*)$$

şeklinde yazalım. $C_1(x)$ ve $C_2(x)$'i belirlemek için (11) sisteminin

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \sec x \end{cases}$$

şeklinde, çözümününse $(\Delta(x) = W(x) = 1)$

$$C_1'(x) = -\sec x \sin x, \; C_2'(x) = \sec x \cos x$$

yani,

$$C_1'(x) = -\tan x, \; C_2'(x) = 1$$

olacağı açıktır. Buradan,

$$C_1(x) = C_1^{\circ} + \ln|\cos x|, \; C_2(x) = C_2^{\circ} + x$$

bulunur. Sonuçları (*) eşitliğinde yazıp verilen denklemin genel çözümünü,

$$y = C_1^{\circ} \cos x + C_2^{\circ} \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x$$

olarak buluruz;

**(b)** Çözüm için önce, türdeş kısmın, yani

$$y'' - \frac{6}{x} y' + \frac{12}{x^2} y = 0$$

denkleminin özel çözümlerinin, $y_1(x) = x^3, y_2(x) = x^4$ olduğunu göz önüne alıp (bkz. Bölüm 3.2'de Alıştırma **2 d**), genel çözümünü yazalım:

$$y_T = C_1 x^3 + C_2 x^4$$

Sonra, verilen türdeş olmayan denklemin çözümü için,

$$y = C_1(x)x^3 + C_2(x)x^4$$

eşitliğini yazıp $C_1(x)$ ve $C_2(x)$ 'i bu fonksiyon sözü edilen denklemi sağlayacak şekilde seçelim. Bunun için,

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2} \qquad \text{ve} \qquad W(x) = \begin{vmatrix} x^3 & x^4 \\ 3x^2 & 4x^3 \end{vmatrix} = x^6$$

olduğunu göz önüne alıp (13) formülünü doğrudan uygularsak,

$$y = C_1^o x^3 + C_2^o x^4 - x^3 \int \frac{(x+1)^2 x^4}{x^8} dx + x^4 \int \frac{(x+1)^2 x^3}{x^8} dx$$

$$y = C_1^o x^3 + C_2^o x^4 - x^3 \int \left( \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right) dx + x^4 \int \left( \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^5} \right) dx$$

$$y = C_1^o x^3 + C_2^o x^4 - x^3 \left( -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3x^3} \right) + x^4 \left( -\frac{1}{2x^2} - \frac{2}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} \right)$$

veya

$$y = C_1^o x^3 + C_2^o x^4 + \frac{1}{12}(6x^2 + 4x + 1)$$

olur. Yani, aranan genel çözüm bulunmuş olur. ○

---

### 3.4.3 Yüksek Mertebeden Doğrusal Denklemler

İkinci mertebeden denklemler için uygulanan sabitlerin değiştirilmesi yöntemi, benzer yolla türdeş olmayan yüksek mertebeden doğrusal denklemler için de uygulanabilir. Bunu biçimsel olarak aşağıdaki gibi açıklayalım.

Herhangi $(a, b)$ aralığında, (1) denkleminin türdeş kısmının $(L_n[y] = 0)$ temel çözümler sisteminin $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, genel çözümününse,

$$y_T = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) \tag{15}$$

olduğunu varsayalım.

(1) denkleminin genel çözümünü bulmak için, (15) eşitliğindeki $C_i$ $(1 = \overline{1, n})$ parametrelerini $x$ 'e bağlı kabul edip, bunları

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x) \tag{16}$$

fonksiyonu (1) denklemini sağlayacak şekilde seçelim. Bunun için önce, (16) eşitliğiyle belirlenen $y(x)$ fonksiyonunun $y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)$ türevlerini aşağıdaki kuralla bulalım:

$$y' = [C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x)] \tag{17}$$
$$+C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \cdots + C_n(x)y_n'(x)$$

$C_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ olmak üzere $n$ sayıda bilinmeyeni belirlemek için, ikinci mertebeden denklemler için açıklananlara benzer olarak, $n$ sayıda ilişkiye gereksinim vardır. Bunlardan bir tanesi (1) denkleminden elde edilir. Diğer $n-1$ tanesi ise keyfi kuralla seçilebilir. Bu ilişkilerden birincisi olarak, (17) eşitliğinin sağ tarafındaki köşeli parantez içi ifadenin sıfır olduğunu kabul edelim:

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) = 0 \tag{$18_1$}$$

O zaman (17) eşitliği

$$y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \cdots + C_n(x)y_n'(x) \tag{$19_1$}$$

biçimini alır. Buradan,

$$y'' = [C_1'y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x)]$$
$$+C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + \cdots + C_n(x)y_n''(x)$$

türevini bulup yine sağ tarafındaki köşeli parantez içi ifadeyi sıfıra eşitleyerek, yani,

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) = 0 \tag{$18_2$}$$

yazarak (ikinci ilişki),

$$y'' = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + \cdots + C_n(x)y_n''(x) \tag{$19_2$}$$

elde ederiz. Yeniden süreci tekrarlayıp benzer işlemleri yaparsak, $(n-1)$. adımda,

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0 \tag{$18_{n-1}$}$$

ve

$$y^{(n-1)} = C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x) \tag{$19_{n-1}$}$$

ifadelerini elde ederiz. Son eşitlikten bir kez daha türev alırsak,

$$y^{(n)} = C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) +$$
$$C_1(x)y_1^{(n)}(x) + C_2(x)y_2^{(n)}(x) + \cdots + C_n(x)y_n^{(n)}(x) \tag{$19_n$}$$

buluruz. (16), $(19_1)$, $(19_2)$, ..., $(19_n)$ ifadelerini (1) denkleminde yazıp $L_n[y_i(x)] = 0$ $(i = \overline{1,n})$ olduğunu göz önüne alırsak,

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x) \qquad (18_n)$$

olur.

Böylece, $C_i(x)$'leri $(i = \overline{1,n})$ belirlemek için, $(18_1), (18_2), \ldots, (18_n)$ denklemlerinden oluşan,

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \ldots + C_n'(x)y_n'(x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases} \qquad (20)$$

cebirsel denklem sistemini (doğrusal) elde ederiz ($C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$ bilinmeyenlerine göre). Bu sistemin tek çözümü vardır ($\Delta = W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0$ olduğundan, bkz. Bölüm 1.5). Belli yöntemle sistemi çözüp $C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$'i, sonra da ikinci mertebeden denklemlerdekine benzer olarak $C_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ parametreleri bulunur. Bulunan sonuçlar (16) denkleminde yazıldığında, (1) denkleminin genel çözümü bulunmuş olur.

**Uyarı 2** Sabitlerin değiştirilmesi yöntemi başlangıç değer problemine uygulandığında, $C_i(x)$'leri bulurken, elde edilen integrallerden en azından biri hesaplanamaz olduğunda, belirsiz integral yerine, $[x_0, x]$ aralığında integral almak gerekir.

---

**ÖRNEK 2** $y''' + y' = \dfrac{1}{x}$, $y(\pi/6) = 1$, $y'(\pi/6) = -2$, $y''(\pi/6) = 0$ başlangıç değer problemini çözün.

○ Önce,

$$y''' + y' = 0$$

türdeş denklemini yazıp

$$k^3 + k = 0, \qquad k_1 = 0, \qquad k_{2,3} = \pm i$$

buluruz, bunun temel çözümler sistemi,

$$y_1(x) = 1, \; y_2(x) = \cos x, \; y_3(x) = \sin x$$

genel çözümü ise,

$$y_T = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x \qquad (**)$$

olur. Burada,

$$y = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x$$

kabul edip (20) sistemini kullanalım $(n = 3, f(x) = 1/x)$ :

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\cos x + C_3'(x)\sin x = 0 \\ \quad - C_2'(x)\sin x + C_3'(x)\cos x = 0 \\ \quad - C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\sin x = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Burada,

$$\Delta = W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 1/x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{1}{x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & 1/x & -\sin x \end{vmatrix} = -\frac{1}{x}\cos x, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & 1/x \end{vmatrix} = -\frac{1}{x}\sin x$$

olduğunu göz önüne alıp Cramer kuralına göre

$$C_1'(x) = \frac{1}{x}, \qquad C_2'(x) = -\frac{1}{x}\cos x, \qquad C_3'(x) = -\frac{1}{x}\sin x$$

buluruz. Son eşitliklerin her iki tarafının $[\pi/6, x]$ aralığında integralini alırsak,

$$C_1(x) = C_1^o + \ln|x|, \qquad C_2'(x) = C_2^o - \int_{\pi/6}^{x} \frac{\cos t}{t}\,dt, \qquad C_3'(x) = C_3^o - \int_{\pi/6}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

olur (son iki eşitlikteki integraller hesaplanamaz olduğundan, Uyarı 2'yi göz önüne aldık). Bulunan ifadeleri (**) eşitliğinde yazdığımızda, ele alınan denklemin genel çözümü

$$y = C_1^o + C_2^o\cos x + C_3^o\sin x + \ln|x| - \cos x \int_{\pi/6}^{x} \frac{\cos t}{t}\,dt - \sin x \int_{\pi/6}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

olarak bulunur. Son eşitlikten $y'$ ve $y''$'yü,

$$y' = -C_2^o\sin x + C_3^o\cos x + \frac{1}{x} + \sin x \int_{\pi/6}^{x} \frac{\cos t}{t}\,dt - \frac{\cos^2 x}{x} - \cos x \int_{\pi/6}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt - \frac{\sin^2 x}{x}$$

$$y' = -C_2^o \sin x + C_3^o \cos x + \sin x \int_{\pi/6}^{x} \frac{\cos t}{t}\,dt - \cos x \int_{\pi/6}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

$$y'' = -C_2^o \cos x - C_3^o \sin x + \cos x \int_{\pi/6}^{x} \frac{\cos t}{t}\,dt + \frac{\sin x \cos x}{x} + \sin x \int_{\pi/6}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt - \frac{\cos x \sin x}{x}$$

$$y'' = -C_2^o \cos x - C_3^o \sin x + \cos x \int_{\pi/6}^{x} \frac{\cos t}{t}\,dt + \sin x \int_{\pi/6}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

olarak bulup başlangıç koşullarını göz önüne alırsak, $C_1^o, C_2^o$ ve $C_3^o$'ı bulmak için,

$$\begin{cases} C_1^o + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2^o + \frac{1}{2}C_3^o + \ln\frac{\pi}{6} = 1 \\ -\frac{1}{2}C_2^o + \frac{\sqrt{3}}{2}C_3^o = -2 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}C_2^o - \frac{\sqrt{3}}{2}C_3^o = 0 \end{cases} \quad \text{yani} \quad \begin{cases} C_1^o + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2^o + \frac{1}{2}C_3^o = 1 - \ln\frac{\pi}{6} \\ C_2^o - \sqrt{3}C_3^o = 4 \\ \sqrt{3}C_2^o + C_3^o = 0 \end{cases}$$

sistemini elde ederiz. Buradan da

$$C_1^o = 1 - \ln\frac{\pi}{6}, C_2^o = 1, C_3^o = -\sqrt{3}$$

buluruz. Sonuçları genel çözümün ifadesinde göz önüne alırsak, başlangıç değer probleminin çözümünü,

$$y = 1 - \ln\frac{\pi}{6} + \cos x - \sqrt{3}\sin x + \ln|x| - \cos x \int_{\pi/6}^{x} \frac{\cos t}{t}\,dt - \sin x \int_{\pi/6}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

olarak buluruz. ○

---

Açıklamalardan görüldüğü gibi, türdeş kısmın temel çözümler sistemi belli olduğunda, keyfi türdeş olmayan doğrusal denklemin (sabit veya değişken katsayılı) genel çözümü bulunabilir.

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 3.4 için)

1. Sabitlerin değiştirilmesi yöntemini kullanarak aşağıdaki denklemlerin genel çözümlerini bulun.

(a) $y'' + y = a$ (b) $y'' + y = x^2$

(c) $y'' + y = e^x$ (d) $y'' + y' = 3$

(e) $y'' + y = \sin x$ (f) $y'' + y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

(g) $y'' + y = \csc x$ (h) $y'' - y' = \sec^2 x - \tan x$

(i) $y''' - y' = x^3$ (j) $y'' + y = \tan x$

(k) $y'' - y = \tanh x$ (l) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$

(m) $y''' + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ (n) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$

(o) $y''' + y'' - y' - y = x^2$

2. Türdeş kısmının temel çözümler sistemi belli olan aşağıdaki denklemleri sabitlerin değiştirilmesi yöntemiyle çözün.

(a) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x \quad (y_1(x) = x, y_2(x) = x^2)$

(b) $x^2y'' - xy' = -x + \dfrac{3}{x} \quad (y_1(x) = 1, y_2(x) = x^2)$

(c) $x^2y'' - xy' + y = 6x \ln x \quad (y_1(x) = x, y_2(x) = x \ln x)$

3. Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini sabitlerin değiştirilmesi yöntemiyle çözün.

(a) $y'' + y = x, y(0) = 1, y'(0) = 0$

(b) $y'' + y = \cot x, \ y(\pi/2) = 0, y'(\pi/2) = a$

(c) $y'' - y = \dfrac{1}{x}, y(1) = y_0, y'(1) = y_0'$

(d) $y'' - y = \dfrac{1}{x}, y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0' \ (x_0 \neq 0)$

## 3.5 TÜRDEŞ OLMAYAN SABİT KATSAYILI DOĞRUSAL DENKLEMLER

Türdeş olmayan, sabit katsayılı $n$. mertebeden

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + p_2y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_ny = f(x) \tag{1}$$

denklemini ele alalım. Burada, $f(x)$, herhangi $(a, b)$ aralığında tanımlı ve sürekli bir fonksiyon, $p_i$'ler $(i = \overline{1, n})$ ise belli gerçel sayılardır.

Açık ki, sabit katsayılı (1) denkleminin

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \tag{2}$$

türdeş kısmının, $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ olmak üzere temel çözümler sistemi ve

$$y_T(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) \tag{3}$$

genel çözümü,

$$k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \cdots + p_{n-1} k + p_n k = 0 \tag{4}$$

karakteristik denkleminin köklerine bağlı olarak her zaman bulunabilir. Dolayısıyla, hiç kuşkusuz, sabit katsayılı (1) denkleminin genel çözümü, sabitlerin değiştirilmesi yöntemiyle bulunabilir. Ancak, kimi durumlarda, sabit katsayılı denklemler için, $f(x)$'in biçimine bağlı olarak denklemin bir özel çözümünü ($\tilde{y}(x)$) bulup Bölüm 3.4'teki teoremi uygulamak, yani (1) denkleminin genel çözümünü

$$y(x) = y_T(x) + \tilde{y}(x) \tag{5}$$

şeklinde yazmak daha uygundur. Bu uygulamanın dayanakları, *yalnız*

$$e^{\alpha x} P_m(x) \quad \text{ve} \quad e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x\right]$$

*şeklindeki fonksiyonların* ($\forall \alpha, \beta \in R, m, s \in N, P_m(x), Q_s(x)$ – *çok terimli*) *türevleri kendisine benzerdir* önermesi ile cebirden belli olan, *herhangi a sayısı gerçel katsayılı bir çokterimlinin $l$ kere tekrarlanan kökü ise, türevinin $l-1$ kere tekrarlanan köküdür,* yani,

$$P_m(x) = (x-a)^l U_{m-l}(x) \quad (U_{m-l}(a) \neq 0)$$

ise,

$$P_m'(x) = (x-a)^{l-1} V_{m-l}(x) \quad (V_{m-l}(a) \neq 0)$$

*eşitliği doğrudur* teoremidir (türevin yardımıyla, sözü edilen teorem kolaylıkla doğrulanabilir).

**Uyarı 1** (1) denkleminin sağ tarafı, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ olmak üzere iki (daha fazla da olabilir) fonksiyonun toplamı şeklinde ise, o zaman denklemin bir özel çözümü, $L_n[y] = f_1(x)$ ve $L_n[y] = f_2(x)$ denklemlerinin birer özel çözümlerinin toplamı olarak alınabilir (bkz. Örnek 1, **d** seçeneği).

(1) denkleminin bir özel çözümünün aranma kuralını vermeden önce, ayrıntılı olarak birkaç örnek çözelim.

**ÖRNEK 1** Aşağıdaki denklemlerin bir özel çözümünü bulup genel çözümlerini yazın.

(a) $y'' + 3y' + 2y = 3e^{2x}$ (b) $y'' + 3y' + 2y = 3e^{-2x}$

(c) $y'' + y = 2\sin 3x$ (d) $y'' + y = 2\sin x - 3e^{x}$

○ (a) Karakteristik denklem ve kökleri

$$k^2 + 3k + 2 = 0, \qquad k_1 = -2,\ k_2 = -1$$

olduğundan, denklemin türdeş kısmının çözümü

$$y_T(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$$

olarak yazılabilir.

Ele alınan denklemin şeklinden görüldüğü gibi, bir özel çözümü, yalnız

$$\tilde{y}(x) = Ae^{2x} \quad (A \neq 0)$$

yani sağ tarafın benzeri biçiminde aranabilir (aksi durumda eşitlik sağlanamaz). Buradan, $A$ parametresini belirlemek için,

$$\tilde{y}'(x) = 2Ae^{2x}, \qquad \tilde{y}''(x) = 4Ae^{2x}$$

türevlerini bulup $\tilde{y}, \tilde{y}'$ ve $\tilde{y}''$'nün ifadelerini ele alınan denklemde $y, y'$ ve $y''$'nün yerine yazarak sadeleştirme yaparsak,

$$4A + 6A + 2A = 3 \quad \text{yani} \quad A = \frac{1}{4}$$

olur. Böylece, verilen denklemin bir özel çözümünü

$$\tilde{y}(x) = \frac{1}{4}e^{2x}$$

genel çözümünü ise,

$$y = y_T(x) + \tilde{y}(x) \quad \text{yani} \quad y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{4}e^{2x}$$

olarak buluruz;

(b) Ele alınan denklem, (a) seçeneğindeki denklemden, yalnız sağ taraftaki ikinci çarpanın $e^{-2x}$ olmasıyla farklıdır. Üstelik, bu terimin kuvvetindeki $\alpha = -2$ sayısı, karakteristik denklemin basit köküdür. Bu nedenle, ele alınan denklemin bir özel çözümü $\tilde{y} = Ae^{-2x}$ $(A \neq 0)$ şeklinde aranamaz. Çünkü, $\tilde{y}$ ve türevlerini denklemde yazıp indirgeme yaparsak, $\alpha = -2$ sayısı karakteristik denklemin kökü olduğundan $0 = 3Ae^{-2x}$ çelişkisi elde edilir. Bu ne-

denle, $\alpha = -2$ sayısının karakteristik denklemin basit (tekrarsız) kökü olduğunu göz önüne alıp bir özel çözümü

$$\tilde{y}(x) = Axe^{-2x} \quad (A \neq 0)$$

şeklinde aramak gerekir. Buradan,

$$\tilde{y}'(x) = A(1-2x)e^{-2x}, \quad \tilde{y}''(x) = A(-4+4x)e^{-2x}$$

bulup $\tilde{y}$ ve türevlerinin ifadelerini denklemde yazar ve sadeleştirme yaparsak,

$$A(-4+4x) + 3A(1-2x) + 2Ax = 3 \quad \text{yani} \quad A = -3$$

olur. Böylece, ele alınan denklemin bir özel çözümü

$$\tilde{y}(x) = -3xe^{2x}$$

genel çözümü ise,

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} - 3xe^{-2x}$$

olarak bulunur;

(c) Yine, ele alınan denklem için

$$k^2 + 1 = 0, \qquad k_{1.2} = \pm i$$

olduğunu göz önüne alıp türdeş kısmın

$$y_T(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

genel çözümünü yazalım.

Denklemin sağ tarafının biçimine göre, bir özel çözümünün

$$\tilde{y}(x) = A\cos 3x + B\sin 3x \quad (A^2 + B^2 \neq 0)$$

şeklinde aranacağı açıktır ($\alpha \pm i\beta = 0 \pm 3i = \pm 3i$ sayısı karakteristik denklemin kökü değildir). Buradan,

$$\tilde{y}''(x) = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$$

türevini bulup $\tilde{y}$ ve $\tilde{y}''$'nün ifadelerini denklemde yazarsak,

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x + A\cos 3x + B\sin 3x = 2\sin 3x$$

yani,

$$-8A\cos 3x - 8B\sin 3x = 2\sin 3x$$

olur. Her iki tarafta sırasıyla $\cos 3x$ ve $\sin 3x$'in katsayılarını birbirine eşitlersek,

$$-8A = 0, \quad -8B = 2 \quad \text{yani} \quad A = 0, \quad B = -\frac{1}{4}$$

elde ederiz. Böylece, bir özel çözümü

$$\tilde{y}(x) = -\frac{1}{4}\sin 3x$$

genel çözümü ise,

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

olarak buluruz;

**(d)** Burada, ele alınan denklemin sağ tarafı $f_1(x) = 2\sin x$ ve $f_2(x) = -3e^x$ olmak üzere iki farklı fonksiyonun toplamı olduğundan, denklemin özel çözümü,

$$y'' + y = 2\sin x \quad \text{ve} \quad y'' + y = -3e^x$$

denklemlerinin özel çözümlerinin ($\tilde{y}_1$ ve $\tilde{y}_2$) toplamına eşittir:

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)$$

Birinci denklem, **(c)** seçeneğinde ele alınan denklemden, sağ tarafındaki çarpanın $\sin x$ olmasıyla farklıdır. Ancak burada $\alpha \pm i\beta = 0 \pm i = \pm i$ sayısı, karakteristik denklemin basit köküdür. Bu nedenle, denklemin bir özel çözümü $\tilde{y}_1(x) = A_1 \cos x + B_1 \sin x$ şeklinde aranamaz. Çünkü, yine $\tilde{y}_1$ ve $\tilde{y}_1''$'nün ifadelerini denklemde yazarsak, $\pm i$ sayısı karakteristik denklemin kökü olduğundan,

$$0 = A_1 \cos x + B_1 \sin x$$

çelişkisini elde ederiz. Bu durumda, $\pm i$ sayısının karakteristik denklemin basit kökü olduğunu göz önüne alıp, bir özel çözümü

$$\tilde{y}_1(x) = x(A_1 \cos x + B_1 \sin x)$$

şeklinde aramak gerekir. Buradan,

$$\tilde{y}_1''(x) = 2(-A_1 \sin x + B_1 \cos x) - x(A_1 \cos x + B_1 \sin x)$$

bulup $\tilde{y}_1$ ve $\tilde{y}_1''$'nün ifadelerini denklemde yazarsak,

$$2(-A_1 \sin x + B_1 \cos x) - x(A_1 \cos x + B_1 \sin x)$$
$$+ x(A_1 \cos x + B_1 \sin x) = 2\sin x$$

yani,

$$-2A_1 \sin x + 2B_1 \cos x = 2\sin x$$

olur. Yine her iki tarafta sırasıyla $\sin x$ ve $\cos x$'in katsayılarını birbirine eşitlersek,

$$-2A_1 = 2, \qquad 2B_1 = 0 \quad \text{yani} \quad A_1 = -1, \qquad B_1 = 0$$

elde ederiz. Böylece, $y'' + y = 2\sin x$ denkleminin bir özel çözümü,

$$\tilde{y}_1(x) = -x\cos x$$

olarak bulunur.

İkinci $y'' + y = -3e^x$ denkleminin bir özel çözümünü

$$\tilde{y}_2(x) = A_2 e^x$$

şeklinde arayıp benzer yolla $A_2 = -3/2$ buluruz. Yani özel çözüm

$$\tilde{y}_2(x) = -\frac{3}{2}e^x$$

olur.

Böylece, ele alınan denklemin bir özel çözümü

$$\tilde{y}(x) = -x\cos x - \frac{3}{2}e^x$$

genel çözümü ise,

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x - \frac{3}{2}e^x$$

olur (türdeş kısmın genel çözümü, (c) seçeneğindekiyle aynıdır). ○

---

Yukarıdaki açıklamaları göz önüne alarak, sağ tarafın şekline bağlı olarak (1) denkleminin bir özel çözümünün bulunabildiği iki genel durumu verelim.

**1.** $f(x) = e^{\alpha x}P_m(x)$ $(\forall\alpha \in R,\ m \in N)$. Bu durumda, (1) denkleminin bir özel çözümünün,

$$\tilde{y}(x) = x^s e^{\alpha x}Q_m(x) \tag{5}$$

şeklinde aranması gerekir. Burada $\alpha$ sayısı (4) karakteristik denkleminin kökü ise, $s$ onun tekrarlılık derecesi (kökü değilse, $s = 0$), $Q_m(x)$ ise belirsiz katsayılı $m$ dereceden çokterimlidir. Bu çokterimlinin katsayıları, $\tilde{y}$ ve $n$. mertebeye kadar türevlerinin ifadelerini (1) denkleminde yazıp sadeleştirme yaptıktan sonra, her iki taraftaki $x$'in aynı dereceli kuvvetlerinin katsayılarını sırasıyla birbirine eşitlemekle belirlenir.

$f(x)$'in ele alınan biçiminin aşağıdaki özel durumlarına sıkça rastlanmaktadır.

a) $\alpha = m = 0$ durumunda, $P_0(x) = C$ (sb) olduğundan, $f(x) = C$
b) $\alpha = 0$ durumunda, $f(x) = P_m(x)$
c) $m = 0$ durumunda, $f(x) = Ce^{\alpha x}$

Örneğin, Örnek 1'in (a) ve (b) seçeneklerinde $m = 0$ 'dır. Ayrıca, (a) seçeneğinde $\alpha = 2$ olup karakteristik denklemin kökü olmadığından ($s = 0$), özel çözüm $\tilde{y}(x) = Ae^{2x}$ şeklinde, (b) seçeneğinde ise, $\alpha = -2$ olup karakteristik denklemin basit kökü olduğundan ($s = 1$), özel çözüm $\tilde{y}(x) = Axe^{2x}$ şeklinde aranmıştır.

---

**ÖRNEK 2** Aşağıdaki denklemleri çözün.

(a) $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$ (b) $y''' + 3y' = 2x^2 + 3x - 1$

○ (a) Önce, karakteristik denklemi yazıp türdeş kısmın genel çözümünü bulalım:

$$k^2 + 2k + 1 = 0,\ k_{1,2} = -1$$

$$y_1(x) = e^{-x},\quad y_2(x) = xe^{-x},\quad y_T(x) = (C_1 + C_2x)e^{-x}$$

$f(x) = xe^{-x}$ ifadesinden, $\alpha = -1, m = 1,\ P_1(x) = x$ olduğu görülmektedir. Ayrıca, $\alpha = -1$ sayısı karakteristik denklemin iki kere tekrarlanan köküdür ($s = 2$). Bunları göz önüne alırsak, ele alınan denklemin bir özel çözümünü,

$$\tilde{y}(x) = x^2e^{-x}(Ax + B) \qquad \text{yani} \qquad \tilde{y}(x) = (Ax^3 + Bx^2)e^{-x}$$

şeklinde aramak gerekir. Buradan,

$$\tilde{y}'(x) = (3Ax^2 + 2Bx)e^{-x} - (Ax^3 + Bx^2)e^{-x}$$

$$\tilde{y}''(x) = (6Ax + 2B)e^{-x} - 2(3Ax^2 + 2Bx)e^{-x} + (Ax^3 + Bx^2)e^{-x}$$

buluruz. Böylece $\tilde{y}, \tilde{y}'$ ve $\tilde{y}''$ 'nün ifadelerini verilen denklemde yazıp indirgersek,

$$6Ax + 2B = x$$

ve sonuçta, $A = 1/6,\ B = 0$ buluruz. Böylece, bir özel çözüm

$$\tilde{y}(x) = \frac{1}{6}x^3e^{-x}$$

olarak bulunur ve genel çözüm

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + \frac{1}{6}x^3e^{-x}$$

olur;

(b) Karakteristik denklem ve kökleri

$$k^3 + 3k = 0, \qquad k_1 = 0, \qquad k_{2,3} = \pm i\sqrt{3}$$

olduğundan, türdeş kısmın özel çözümleri

$$y_1(x) = 1, \qquad y_2(x) = \cos\sqrt{3}x, \qquad y_3(x) = \sin\sqrt{3}x$$

genel çözümü ise,

$$y_T(x) = C_1 + C_2 \cos\sqrt{3}x + C_3 \sin\sqrt{3}x$$

olur.

Denklemin sağ tarafının $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ $(\alpha = 0,\ m = 2)$ ve $\alpha = 0$ sayısının karakteristik denklemin basit kökü olduğunu $(s = 1)$ göz önüne alırsak, özel çözümü

$$\tilde{y}(x) = x(Ax^2 + Bx + C) \quad \text{yani} \quad \tilde{y}(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

şeklinde aramak gerekir. Buradan,

$$\tilde{y}'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C, \qquad \tilde{y}'''(x) = 6A$$

bulup denklemde yazarsak,

$$6A + 3(3Ax^2 + 2Bx + C) = 2x^2 + 3x - 1$$

yani,

$$9Ax^2 + 6Bx + 6A + 3C = 2x^2 + 3x - 1$$

ve sonuçta ise

$$9A = 2, \qquad 6B = 3, \qquad 6A + 3C = -1, \qquad \text{yani} \qquad A = \frac{2}{9}, \qquad B = \frac{1}{2}, \qquad C = -\frac{7}{9}$$

elde ederiz. Böylece, bir özel çözüm

$$\tilde{y}(x) = \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{9}x$$

genel çözüm ise,

$$y = C_1 + C_2 \cos\sqrt{3}x + C_3 \sin\sqrt{3}x + \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{9}x$$

olarak bulunur. ○

2. $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + R_r(x)\sin\beta x]$ $(\forall\alpha, \beta \in R,\ m, r \in N)$. Bu durumda, (1) denkleminin bir özel çözümünün,

$$\tilde{y}(x) = x^s e^{\alpha x}[Q_l(x)\cos\beta x + T_l(x)\sin\beta x] \tag{6}$$

şeklinde aranması gerekir ($\beta = 0$ olduğunda $f(x) = e^{\alpha x}P_m(x)$, yani birinci durum elde edildiğinden, $\beta \neq 0$ kabul edilir). Burada, $\alpha \pm i\beta$ sayısı (4) karakteristik denkleminin kökü ise $s$ onun tekrarlılık derecesi (kökü değilse $s = 0$), $l = \max(m, r)$, $Q_l(x)$ ve $T_l(x)$ ise, belirsiz katsayılı $l$ dereceden çokterimlilerdir. Bu çokterimlilerin katsayıları, (6) eşitliğinin yardımıyla belirlenen $\tilde{y}$'yi ve bunun, denklemin içerdiği türevlerinin ifadelerini (1) denkleminde yazıp indirgeme yaptıktan sonra, her iki taraftaki $\cos\beta x$ ve $\sin\beta x$'in katsayılarını sırasıyla eşitleyip elde edilen eşit çokterimlilerin katsayılarını karşılaştırma yoluyla belirlenir.

Bu durumda da $f(x)$'in aşağıdaki özel biçimlerine sıkça rastlanmaktadır.

(a) $m = r = 0$ durumunda, $f(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$. Ayrıca, $A \neq 0$ $B = 0$ için, $f(x) = Ae^{\alpha x}\cos\beta x$, $A = 0, B \neq 0$ içinse, $f = (x) = Be^{\alpha x}\sin\beta x$ olur;

(b) $\alpha = 0$ durumunda, $f(x) = P_m(x)\cos\beta x + R_r(x)\sin\beta x$. Ayrıca, $m = r = 0$ için, $f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$ olur.

---

**ÖRNEK 3** Aşağıdaki denklemleri çözün.

(a) $y'' + 2y' + 5y = 3e^{-x}\cos x$ (b) $y''' + y' = 2x\sin x$

○ (a) Önce, karakteristik denklemi yazıp türdeş kısmın genel çözümünü bulalım:

$$k^2 + 2k + 5 = 0, \qquad k_{1,2} = -1 \pm 2i$$

$$y_1(x) = e^{-x}\cos 2x, \qquad y_2(x) = e^{-x}\sin 2x$$

$$y_T(x) = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$$

Şimdi, $f(x) = 3e^{-x}\cos x$ yani $\alpha \pm i\beta = -1 \pm i$, $m = 0$, $P_0(x) = 3$, $r = 0$, $R_0(x) = 0$ olduğunu, $-1 \pm i$ sayısının karakteristik denklemin kökü olmadığını ($s = 0$) ve $l = \max(m, r) = 0$ olduğunu göz önüne alıp bir özel çözümü

$$\tilde{y}(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$$

şeklinde arayalım. Buradan,

$$\tilde{y}'(x) = -e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + e^{-x}(-A\sin x + B\cos x)$$

$$\tilde{y}''(x) = -2e^{-x}(-A\sin x + B\cos x)$$

bulunur. $\tilde{y}, \tilde{y}'$ ve $\tilde{y}''$'nün ifadelerini denklemde yazıp indirgersek,

$$3A\cos x + 3B\sin x = 3\cos x$$

buradan da, $3A = 3$, $3B = 0$ yani $A = 1$, $B = 0$ elde ederiz.

Böylece, ele alınan denklemin bir özel çözümü

$$\tilde{y}(x) = e^{-x}\cos x$$

genel çözümü ise,

$$y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + e^{-x}\cos x$$

olarak bulunur;

**(b)** Yine karakteristik denklem ve kökleri

$$k^3 + k = 0, \qquad k_1 = 0, \qquad k_{2,3} = \pm i$$

olduğundan, türdeş kısmın genel çözümü

$$y_T(x) = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x$$

olarak bulunur.

Şimdi, $f(x) = x\sin x$ yani $\alpha \pm i\beta = \pm i$, $m = 0$, $P_0(x) = 0$, $r = 1$, $R_1(x) = 2x$, $l = \max(0,1) = 1$ olduğunu ve $\pm i$ sayısının karakteristik denklemin basit kökü olduğunu ($s = 1$), dolayısıyla $l = 1$ olduğundan $Q_l(x)$ ve $T_l(x)$'in birinci dereceden çokterimli olacağını göz önüne alırsak, (6) formülüne göre bir özel çözümün

$$\tilde{y}(x) = x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x]$$

yani

$$\tilde{y}(x) = (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x$$

şeklinde aranacağı açıktır. Buradan elde edilen,

$$\tilde{y}'(x) = (2Ax + B)\cos x - (Ax^2 + Bx)\sin x + (2Cx + D)\sin x + (Cx^2 + Dx)\cos x$$

$$\tilde{y}'''(x) = -6A\sin x - 3(2Ax + B)\cos x + (Ax^2 + Bx)\sin x + 6C\cos x - 3(2Cx + D)\sin x - (Cx^2 + Dx)\cos x$$

türevlerini denklemde göz önüne alıp sadeleştirme yaparsak,

$$(-4Ax - 2B + 6C)\cos x + (-4Cx - 6A - 2D)\sin x = 2x\sin x$$

olur. Her iki tarafta sırasıyla, $\cos x$ ve $\sin x$ 'lerin katsayılarını eşitlersek,

$$\begin{cases} -4Ax - 2B + 6C = 0 \\ -4Cx - 6A - 2D = 2x \end{cases}$$

buradan da, $A = D = 0, B = -3/2, C = -1/2$ buluruz. Böylece, verilen denklemin bir özel çözümü

$$\tilde{y}(x) = -\frac{3}{2}x\cos x - \frac{1}{2}x^2 \sin x$$

genel çözümü ise,

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \frac{3}{2}x\cos x - \frac{1}{2}x^2 \sin x$$

olarak bulunur. ○

---

Örnek çözümünde duruma bağlı olarak, açıklanan bu yöntem veya sabitlerin değiştirilmesi yöntemi uygulanabilir.

**Uyarı 2** Yukarıda açıklanan **2.** durumda, $\cos \beta x$ ve $\sin \beta x$ yerine sırasıyla, $\cosh \beta x$ ve $\sinh \beta x$ olduğunda da biçimsel olarak benzer işlemler yapılabilir veya Euler formülleri kullanılarak, **1.** duruma dönüştürülebilir.

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 3.5 için)

**1.** Sağ tarafın şekline bağlı olarak, aşağıda verilen denklemlerin bir özel çözümünü bulup genel çözümünü yazın.

**(a)** $y'' - y = x^2 + 2x - 3$

**(b)** $y'' + y = 3x^2 - 2x + 1$

**(c)** $y'' + 2y' = 6$

**(d)** $y'' + y = 2x^2 - 3x + 4$

**(e)** $y'' - y = 8e^x$

**(f)** $y'' - 2y' - 3y = -4e^x + 3$

**(g)** $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2x^2$

**(h)** $y'' + 3y' - 10y = xe^{-2x}$

**(i)** $y'' - 9y' + 20y = x^2e^{4x}$

**(j)** $y'' - 2my' + m^2y = \sin mx$

**(k)** $y'' - 2my' + m^2y = \sin nx \quad (m \neq n)$

**(l)** $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$

**(m)** $y'' - y = x\cos^2 x$

(n) $4y'' - y = x^3 - 24x$ (o) $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$

(p) $y''' + y'' - 2y' = x - e^x$ (r) $y''' + y'' = e^{-x} + 6x$

(s) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 3e^{2x} - 4\sin 2x$

(t) $y^{(4)} + y'' = 2x^2 + 1$ (u) $y^{(5)} + y^{(4)} = 2e^{-x} + 3$

(v) $y^{(4)} - y = 4\sin x - 8e^{-x} + 1$ (y) $y^{(4)} + 8y'' + 16y = \cos x$

(z) $y^{(4)} + 2a^2y'' + a^4y = \cos ax$ (za) $y^{(4)} - y = xe^x + \cos x$

(zb) $y^{(4)} - 2y'' + y = 16\cosh x + 4(\sin x + \cos x)$

2. Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün.

(a) $y'' + 4y = 3\sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

(b) $y'' + 9y = 9x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3$

(c) $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3.2$

(d) $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3),\ y(0) = y'(0) = 2$

(e) $y'' + y = -\sin 2x,\ y(\pi) = y'(\pi) = 1$

(f) $y'' + 2y' + y = \sin x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1$

(g) $y''' + y'' = x,\ y(0) = -3,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$

(h) $y''' + y'' = \cos x,\ y(0) = -2,\ y'(0) = y''(0) = 0$

(i) $y^{(4)} - y'' = 1,\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

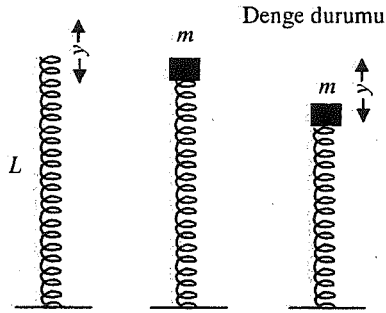
(j) $y^{(4)} + y''' = \cos x,\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,\ y'''(0) = a$

## 3.6 MEKANİK SALINIM DENKLEMİ VE İNCELENMESİ

### 3.6.1 Mekanik Salınım Denklemi

Salınım problemi çağdaş teknolojinin temel problemlerinden biridir ve diferansiyel denklemlerin yardımıyla incelenebilir.

Dikey durumdaki $L$ yayının $m$ kütleli yükün ve herhangi $F(t)$ kuvvetinin etkisiyle durumunu değiştirdiğini düşünelim ($t$ zamandır). Yayın denge durumundan sapma miktarı $y$ olsun (aşağı sapmada $y > 0$, yukarı sapmada $y < 0$, Şekil 18). Yayı denge durumuna döndürmek için yüke, hareketin ter-




**ŞEKİL 18**

si yönünde, yayın esnekliğine bağlı *eski haline döndürme kuvveti* ve *direnç kuvveti* olmak üzere iki kuvvetin etkidiğini kabul edelim. Yayı eski haline döndürme kuvvetinin sapma ile orantılı ($\lambda y$), direnç kuvvetinin ise hareketin hızı ile orantılı ($\mu y'$) olduğunu varsayalım (burada $\lambda$ ve $\mu$, sırasıyla yayın esnekliğine ve direncine bağlı, negatif olmayan katsayılardır). Söylenenleri ve Newton'un ikinci yasasını göz önüne alıp hareketin diferansiyel denklemini

$$my'' = -\mu y' - \lambda y + F(t) \tag{1}$$

olarak yazabiliriz. $F(t)$ 'ye *dış kuvvet* veya *tedirginlik kuvveti* denir.

Elde edilen denklem, *mekanik salınım denklemi* diye adlandırılır ve görüldüğü gibi, sabit katsayılı ikinci mertebeden doğrusal denklemdir. Bunu

$$y'' + py' + qy = f(t) \tag{2}$$

şeklinde yazalım ( $p = \mu / m$, $q = \lambda / m$, $f(t) = F(t) / m$ kabul ettik).

Tedirginlik kuvveti (dış kuvvet) bulunmadığında ($f(t) \equiv 0$), elde edilen

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{3}$$

denklemine *serbest salınım denklemi* denir. Türdeş olmayan ($f(t) \neq 0$) (2) denklemine ise *zorunlu salınım denklemi* denir.

### 3.6.2 Serbest Salınım Denkleminin İncelenmesi

Şimdi, $p$ ve $q$ yani $\lambda$ ve $\mu$ katsayılarına bağlı olarak, (3) denkleminin ifade ettiği hareketi inceleyelim ( $p \geq 0$, $q \geq 0$ olduğu bellidir). Bunun için,

$$k^2 + pk + q = 0$$

karakteristik denklemini yazıp, köklerin türüne bağlı olarak çözüm fonksiyonunu araştırmak gerekir.

**(a)** $k_1 \neq k_2$ ve gerçektirler. $p \geq 0$, $q \geq 0$ olduğundan, $k_1 < k_2 \leq 0$ 'dır). Bu durumda çözüm

$$y = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} \quad (k_2 < 0 \text{ için})$$

veya

$$y = C_1 e^{k_1 t} + C_2 \quad (k_2 = 0 \text{ yani } q = 0 \text{ için})$$

şeklinde olduğundan, $t \to \infty$ 'da sapma $(y)$ sıfıra, ya da $C_2$ 'ye yaklaşır. Demek ki salınım hareketi yoktur;

**(b)** $k_1 = k_2 (= k)$ $(p^2 / 4 - q = 0,\ k = -p / 2)$. Bu durumda çözüm

$$y = (C_1 + C_2 t) e^{kt}$$

olur. Yine, $t \to \infty$ 'da sapma $(y)$ sıfıra yaklaşır. Yani bu durumda da salınım hareketi yoktur;

**(c)** $k_{1,2} = \pm i\beta$ $(\beta^2 = q,\ p = 0)$. Bu durumda denklem

$$y'' + q = 0$$

çözümü ise,

$$y = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t$$

olur. Sağ tarafı

$$C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left( \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos \beta t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin \beta t \right)$$

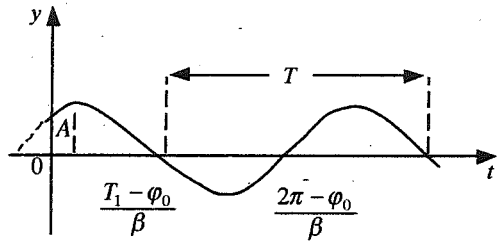
yani

$$C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t = A \sin(\beta t + \varphi_0)$$

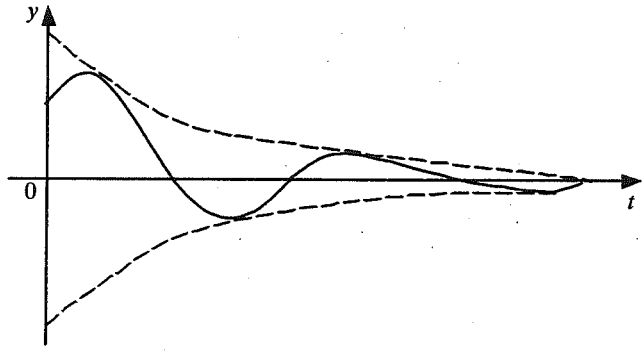
şeklinde dönüştürürsek ( $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\varphi_0 = \arctan(C_1 / C_2)$ kabul ettik), çözüm

$$y = A \sin(\beta t + \varphi_0) \tag{4}$$

biçimini alır. Görüldüğü gibi, bu durumda ( $p = 0$ yani direnç kuvveti bulunmadığında) hareket, salınım hareketidir. (4) eşitliğinin belirlediği hareket, *harmonik (uyumlu) hareket* diye adlandırılır. Burada $A$, *salınım genliği* (denge durumundan en büyük sapma), $\beta$, *salınım sıklığı* ( $2\pi$ uzunluklu aralıkta salınım sayısı), $T = 2\pi / \beta$ *salınım devri*, $\varphi_0$ ise *başlangıç faz* diye adlandırılır (Şekil 19);




**ŞEKİL 19**




**ŞEKİL 20**

**(d)** $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $(p^2/4 - q < 0,\ \alpha = -p/2,\ \beta^2 = q - p^2/4)$. Bu durumda çözüm,

$$y = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$$

olur. **(c)** seçeneğindeki gibi dönüşüm yaparsak, çözüm,

$$y = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0) \tag{5}$$

biçimini alır. Sağ taraftaki sinüs çarpanı hareketin salınım hareketi olduğunu göstermektedir. Ancak, $\alpha = -p/2 < 0$ olduğundan, $t \to \infty$'da $e^{\alpha t} \to 0$ olur ve bu nedenle de hareketin *sönümlü salınım hareketi* olduğunu görüyoruz (Şekil 20). ○

---

**ÖRNEK 1** Aşağıdaki başlangıç değer problemlerinin belirlediği harmonik hareketi, genliğini, salınım sıklığını, devrini ve başlangıç fazını bulun.

**(a)** $y'' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

**(b)** $y'' + 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

○ **(a)** Denklemin karakteristik denklemi ve kökleri

$$k^2 + 1 = 0, \qquad k_{1,2} = \pm i \quad (\beta = 1)$$

olduğundan, genel çözümü

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t \qquad \text{veya} \qquad y = A \sin(t + \varphi_0)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, başlangıç koşullarını göz önüne alırsak,

$$\begin{cases} 1 = A \sin \varphi_0 \\ 0 = A \cos \varphi_0 \end{cases}$$

ve sonuçta ise $A \neq 0$ olduğundan $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, $A = 1$ bulunur ve ele alınan problemin çözümü

$$y = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

olur. Çözümün şeklinden görüldüğü gibi, bunun ifade ettiği harmonik hareketin genliği $A = 1$, salınım sıklığı $\beta = 1$, devri $T = 2\pi$, başlangıç fazı ise $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$'dir;

**(b)** Karakteristik denklem ve kökleri

$$k^2 + 4 = 0, \qquad k_{1,2} = \pm 2i \quad (\beta = 2)$$

olduğundan, ele alınan denklemin genel çözümü

$$y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t \qquad \text{veya} \qquad y = A \sin(2t + \varphi_0)$$

olur. Burada başlangıç koşulları göz önüne alırsak,

$$\begin{cases} 1 = A \sin \varphi_0 \\ 2 = 2A \cos \varphi_0 \end{cases} \qquad \text{yani} \qquad \varphi_0 = \frac{\pi}{4}, \; A = \sqrt{2}$$

bulunur ve aranan çözüm

$$y = \sqrt{2} \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

olur. Çözümden, $A = \sqrt{2}$, $\beta = 2$, $T = \pi$, $\varphi_0 = \pi / 4$ olduğu görülmektedir. ○

### 3.6.3 Zorunlu Salınım Denkleminin İncelenmesi

Şimdi, zorunlu salınım denkleminin, yani (2) denkleminin çözümünü, $p, q$ katsayıları ve $f(t)$ dış kuvvet fonksiyonuna bağlı olarak inceleyelim.

Çözüm fonksiyonunun salınım hareketini ifade ettiği durumlarla ilgilendiğimiz için, dış kuvvet fonksiyonunun

$$f(t) = a\cos\omega t$$

şeklinde olduğunu düşünelim ($f(t) = a\sin\omega t$ de olabilir). O zaman denklem

$$y'' + py' + qy = a\cos\omega t \tag{6}$$

şeklini alır. Bu denklem için, karakteristik denklemin $k_1$, $k_2$ köklerine bağlı olarak aşağıdaki durumları inceleyelim.

**(a) $k_1$, $k_2$ gerçeldirler.** Bu durumda, türdeş kısmın genel çözümünün

$$y_T = C_1e^{k_1t} + C_2e^{k_2t} \quad (k_1 \neq k_2)$$

veya

$$y_T = (C_1 + C_2t)e^{kt} \quad (k_1 = k_2 = k)$$

olacağı açıktır.

Sağ tarafın şekline bağlı olarak, (6) denkleminin bir özel çözümünü

$$\tilde{y} = B\cos\omega t + C\sin\omega t$$

biçiminde arayalım. Buradan,

$$\tilde{y}' = -B\omega\sin\omega t + C\omega\cos\omega t \qquad \text{ve} \qquad \tilde{y}'' = -B\omega^2\cos\omega t - C\omega^2\sin\omega t$$

buluruz, $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ ve $\tilde{y}''$'nün ifadelerini denklemde yazıp katsayıları belli yöntemle karşılaştırırsak, $B$ ve $C$'yi belirlemek için,

$$\begin{cases}(q-\omega^2)B + p\omega C = a\\ -p\omega B + (q-\omega^2)C = 0\end{cases} \tag{7}$$

sistemini elde ederiz. Bu sistemin çözümü için, aşağıdaki olası iki durumu inceleyelim.

**1.** $q = \omega^2$. Bu durumda, $B = 0$, $C = \dfrac{a}{p\omega}$ olur ve aranan özel çözüm

$$\tilde{y} = \frac{a}{p\omega}\sin\omega t$$

olarak bulunur, (6) denkleminin genel çözümü ise

$$y = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} + \frac{a}{p\omega}\sin\omega t \quad (k_1 \neq k_2)$$

veya

$$y = (C_1 + C_2 t)e^{kt} + \frac{a}{p\omega}\sin\omega t \quad (k_1 = k_2 = k) \tag{8}$$

olur. Burada,

$$\lim_{t\to\infty}(C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{t\to\infty}(C_1 + C_2 t)e^{kt} = 0$$

olduğu göz önüne alındığında, belli bir $t_0$ süresinden sonra, çözümün başlıca teriminin sağ taraftaki son terim, yani

$$y_{t_0} = \frac{a}{p\omega}\sin\omega t \quad (t > t_0)$$

olduğu ve salınım hareketini ifade ettiği söylenebilir;

**2.** $q \neq \omega^2$. Bu durumda, (7) sisteminden

$$B = \frac{a(q-\omega^2)}{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}, \qquad C = \frac{ap\omega}{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}$$

bulunur ve

$$\tilde{y} = \frac{a(q-\omega^2)}{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}\cos\omega t + \frac{ap\omega}{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}\sin\omega t$$

veya

$$\tilde{y} = \tilde{A}\sin(\omega t + \tilde{\varphi}_0)$$

olur (burada, $\tilde{A} = \dfrac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}}$, $\varphi_0 = \arctan\dfrac{q-\omega^2}{p\omega}$ olarak kabul edilmiştir). Sonuçta (6) denkleminin genel çözümü

$$y = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} + \tilde{A}\sin(\omega t + \tilde{\varphi}_0) \quad (k_1 \neq k_2)$$

veya

$$y = (C_1 + C_2 t)e^{kt} + \tilde{A}\sin(\omega t + \tilde{\varphi}_0) \quad (k_1 = k_2 = k)$$

olarak bulunur. Yine, belli bir $t_0$ süresinden sonra, çözümün başlıca teriminin sağ taraftaki son terim, yani

$$y_{t_0} = \tilde{A}\sin(\omega t + \tilde{\varphi}_0) \quad (t > t_0)$$

teriminin olduğu ve salınım hareketini ifade ettiği söylenebilir;

**(b)** $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Bu durumda,

$$y_T = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) \text{ yani } y_T = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0) \qquad (9)$$

olacağı bellidir. Buradā, $\alpha = 0$ (yani $p = 0$) ve $\alpha \neq 0$ (yani $p \neq 0$) olmak üzere, olası iki durumu tek tek incelemek gerekir.

**1.** $\alpha = 0$. Bu durumda, (6) denklemi

$$y'' + qy = a \cos \omega t \qquad (6^*)$$

şeklini alır ve türdeş kısmın çözümü

$$y_T = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t \quad \text{veya} \quad y_T = A \sin(\beta t + \varphi_0)$$

olur ($\beta = \sqrt{q}$).

(6*) denkleminin bir özel çözümü, $\beta^2 \neq \omega^2$ veya $\beta^2 = \omega^2$ olmasına bağlı olarak aşağıdaki iki biçimde aranabilir.

**(i)** $\beta^2 \neq \omega^2$. Bu durumda, özel çözümü

$$\tilde{y} = B \cos \omega t$$

biçiminde arayıp $B = \dfrac{a}{\beta^2 - \omega^2}$ buluruz ((6*) denklemi $y'$'yü içermediğinden, $C \sin \omega t$ toplananına gerek yoktur) ve

$$\tilde{y} = \frac{a}{\beta^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

genel çözüm ise,

$$y = A \sin(\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{\beta^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

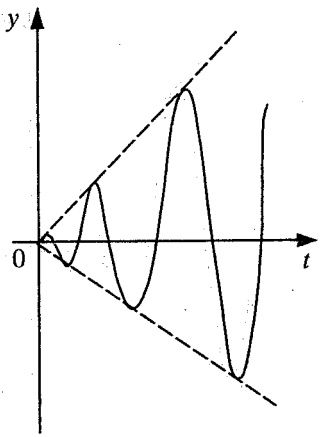
olur.

Böylece, $\beta^2 \neq \omega^2$ *durumunda, (6*) denkleminin çözümü, iki salınım hareketinin toplamı (yani iki farklı devirli fonksiyonun toplamı) olarak salınım hareketini ifade eder;*

**(ii)** $\beta^2 = \omega^2$. Bu durumda, (6*) denkleminin bir özel çözümünü

$$\tilde{y} = t(B \cos \omega t + C \sin \omega t)$$

biçiminde aramak gerekir. $\tilde{y}$ ve buradan bulunan $\tilde{y}''$'nün ifadelerini (6*) denkleminde yazıp belli yöntemle katsayıları karşılaştırırsak, $B = 0$, $C = \dfrac{a}{2\omega}$ buluruz. Sonuçta,




**ŞEKİL 21**

$$\tilde{y} = \frac{at}{2\omega}\sin\omega t$$

ve

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{at}{2\omega}\sin\omega t$$

olur.

Son eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terimin şeklinden görüleceği gibi, $t$ sınırsız olarak arttığında, salınım genliği, yani $\frac{at}{2\omega}$ çarpanı sınırsız olarak artar ve *rezonans olayı* ortaya çıkar. Demek ki, *dış kuvvetin sıklığı* $(\omega)$, *mekanik sistemin sıklığı* $(\beta)$ *ile çakıştığında rezonans olayı oluşur.* Rezonans olayına neden olan terimin grafiği $(A = 0)$ Şekil 21'de verilmiştir;

**2.** $\alpha \neq 0$. Bu durumda da, karakteristik denklemin köklerinin gerçel olduğu durumundaki gibi ((a) seçeneği), $q = \omega^2$ ve $q \neq \omega^2$ olmak üzere, olası iki durum vardır. Burada da, sözü edilen seçenekteki gibi,

(i) $q = \omega^2$ durumunda, (6) denkleminin bir özel çözümü

$$\tilde{y} = \frac{a}{p\omega}\sin\omega t$$

genel çözümü ise,

$$y = Ae^{\alpha t}\sin(\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{p\omega}\sin\omega t$$

olur. Burada da, $\alpha < 0$ olduğu için, $t \to \infty$'da sağ taraftaki birinci toplananın limiti sıfır olduğundan, belli bir $t_0$ süresinden sonra çözümün başlıca terimi sağ taraftaki ikinci terim, yani,

$$y_{t_0} = \frac{a}{p\omega}\sin\omega t \quad (t > t_0)$$

terimi olur ve bu da salınım hareketini ifade eder;

**(ii)** $q \neq \omega^2$ durumunda ise, bir özel çözüm

$$\tilde{y} = \tilde{A}\sin(\omega t + \tilde{\varphi}_0)$$

genel çözüm ise,

$$y = Ae^{\alpha t}\sin(\beta t + \varphi_0) + \tilde{A}\sin(\omega t + \tilde{\varphi}_0)$$

olur. Burada da, belli bir $t_0$ süresinden sonra çözümün başlıca terimi sağ taraftaki ikinci terim, yani,

$$y_{t_0} = \tilde{A}\sin(\omega t + \tilde{\varphi}_0) \quad (t > t_0)$$

olur ve bu da salınım hareketini ifade eder.

---

**ÖRNEK 2** Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözüp, çözüm fonksiyonunun ifade ettiği hareketi inceleyin.

**(a)** $y'' + 2y' + y = 3\cos 2t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

**(b)** $y'' + 4y = 3\sin 2t,\ y(0) = y(0) = 0$

**(c)** $y'' + 4y = 2\cos 3t,\ y(0) = y(0) = 0$

○ **(a)** Türdeş kısmın karakteristik denklemi ve kökleri

$$k^2 + 2k + 1 = 0, \qquad k_{1,2} = -1$$

olduğundan,

$$y_T = (C_1 + C_2 t)e^{-t}$$

olur.

Verilen denklemin bir özel çözümünü

$$\tilde{y} = B\cos 2t + C\sin 2t$$

biçiminde arayıp, belli yöntemle katsayıları karşılaştırdığımızda, $B = -9/25$, $C = 12/25$ buluruz ve

$$\tilde{y} = -\frac{9}{25}\cos 2t + \frac{12}{25}\sin 2t$$

olur.

Böylece, verilen denklemin genel çözümü

$$y = (C_1 + C_2 t)e^{-t} - 3\left(\frac{3}{25}\cos 2t - \frac{4}{25}\sin 2t\right)$$

olarak bulunur. Başlangıç koşullarını göz önüne alıp buradan $C_1 = 34/25$, $C_2 = 10/25$ buluruz ve ele alınan problemin çözümü

$$y = \frac{2}{25}(17 + 5t)e^{-t} - 3\left(\frac{3}{25}\cos 2t - \frac{4}{25}\sin 2t\right)$$

veya

$$y = \frac{2}{25}(17 + 5t)e^{-t} - 3\sin(2t + \varphi_0) \qquad (\varphi_0 = \arctan 0.75)$$

olarak bulunur. Çözümün şeklinden görüldüğü gibi, belli bir süreden sonra çözüm salınım hareketini ifade eder;

**(b)** Yine,

$$k^2 + 4 = 0, \qquad k_{1,2} = \pm 2i$$

karakteristik denklemi ve köklerini yazıp,

$$y_T = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$$

buluruz.

$\omega = \beta = 2$ olduğundan, ele alınan denklemin bir özel çözümünü

$$\tilde{y} = t(B\cos 2t + C\sin 2t)$$

biçiminde aramak gerekir. Buradan,

$$\tilde{y}'' = 2(-2B\sin 2t + 2C\cos 2t) - 4t(B\cos 2t + C\sin 2t)$$

buluruz, $\tilde{y}$ ve $\tilde{y}''$'nün ifadelerini denklemde yazıp eşitliğin her iki tarafında sırasıyla $\cos 2t$ ve $\sin 2t$'lerin katsayılarını birbirine eşitlersek, $B = 5/4$, $C = 0$ buluruz ve bir özel çözüm

$$\tilde{y} = \frac{5}{4}t\cos 2t$$

olur. O zaman, ele alınan denklemin genel çözümü

$$y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{5}{4}t\cos 2t$$

şeklinde yazılabilir. Başlangıç koşullarını göz önüne alıp $C_1 = 0$, $C_2 = -5/8$ buluruz.

Böylece, ele alınan problemin çözümü

$$y = -\frac{5}{8}\sin 2t + \frac{5}{4}t\cos 2t$$

olur. $t \to \infty$ 'da sağ taraftaki ikinci terimin belirlediği salınım hareketinin genliği $\infty$ 'a yaklaştığından rezonans olayı oluşur;
(c) Burada da,

$$y_T = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$$

olacağı açıktır.

Ele alınan denklemin bir özel çözümünü

$$\tilde{y} = B \cos 3t$$

biçiminde arayıp $(\beta \neq \omega)$, $B - 2/5$ buluruz ve

$$\tilde{y} = -\frac{2}{5} \cos 3t$$

olur. O zaman, ele alınan problemin genel çözümü

$$y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - \frac{2}{5} \cos 3t$$

şeklinde yazılabilir.

Başlangıç koşullarını kullanarak $C_1 = 2/5$, $C_2 = 0$ buluruz ve aranan çözüm

$$y = \frac{2}{5}(\cos 2t - \cos 3t)$$

olmak üzere salınım hareketini ifade eder. O

---

**Uyarı** Başlangıç koşullarına bağlı olarak, $C_1 = C_2 = 0$ yani $A = 0$ olabilir. O zaman, karakteristik denklemin köklerinin türüne bağlı olmadan, çözüm fonksiyonun daima salınım hareketini ifade edeceği açıktır (bkz. Alıştırma 2 (c)).

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 3.6 için)

1. Aşağıdaki başlangıç değer problemlerinin belirlediği harmonik hareketi, genliğini, salınım sıklığını, devrini ve başlangıç fazını bulun.

   (a) $y'' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

   (b) $y'' + y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0$

   (c) $y'' + y = 0,\ y(0) = y'(0) = 1$

   (d) $y'' + y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1$

(e) $y'' + 4y = 0,\ y(0) = y'(0) = 1$

(f) $y'' + 4y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1$

(g) $y'' + 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3$

(h) $y'' + 9y = 0,\ y(0) = -3,\ y'(0) = 1$

2. Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözüp, çözüm fonksiyonunun ifade ettiği hareketi inceleyin.

(a) $y'' + 3y' + 2y = 3\sin 2t,\ y(0) = y'(0) = 0$

(b) $y'' + 5y' + 4y = 5\cos 2t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

(c) $y'' + 5y' + 4y = 5\cos 2t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

(d) $y'' + y = 3\sin t,\ y(0) = y(0) = 0$

(e) $y'' + y = 2\cos t,\ y(0) = 1,\ y(0) = 0$

(f) $y'' + y = 4\sin t,\ y(0) = y(0) = 1$

(g) $y'' + 9y = 5\sin 2t,\ y(0) = y(0) = 1$

(h) $y'' + 3y = 4\cos t,\ y(0) = 1,\ y(0) = -1$

## 3.7 EULER DENKLEMİ

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + p_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = 0 \qquad (1)$$

şeklindeki denkleme, *Euler denklemi* denir. Burada, $p_i$ $(i = \overline{1,n})$, sabit gerçel katsayılardır.

Görüldüğü gibi, Euler denklemi, değişken katsayılı $n$. mertebeden doğrusal diferansiyel denklemin özel bir durumudur ve $x = 0$ denklemin tekil noktasıdır. Bu nedenle, Euler denkleminin çözümünü, $x > 0$ ve $x < 0$ olmak üzere tek tek incelemek gerekir.

Euler denklemi, $x > 0$ durumunda $x = e^t$, $x < 0$ durumunda ise $x = -e^t$ yerine koymasının yardımıyla, sabit katsayılı denkleme dönüştürülerek çözülebilir. Ancak biz bu yönteme başvurmaksızın, denklemin biçiminden yararlanacağız.

Euler denkleminin özel çözümlerinin

$$y = x^k \qquad (2)$$

şeklinde olacağı, denklemin biçiminden görülmektedir $(k = ?)$.

Bilinmeyen $k$ sayısını belirlemek için, sabit katsayılı doğrusal denklemlerdekine benzer olarak, (2) eşitliğiyle belirlenen $y$'yi ve bunun $n$. mertebeye kadar türevlerini (1) denkleminde yazıp her iki tarafı $x^k$'ya bölerek kısalttıktan sonra ($x \neq 0$),

$$k(k-1)\cdots(k-n+1) + p_1 k(k-1)\cdots(k-n+2) + \cdots + p_{n-1}k + p_n = 0$$

şeklinde, $k$'ye göre $n$. dereceden denklem elde edilir ve *karakteristik denklem* diye adlandırılır. Karakteristik denklemin bütün kökleri ($n$ sayıda) bulunup (2) eşitliğinin yardımıyla özel çözümler ($n$ sayıda), daha sonra da genel çözüm yazılır.

Söylenenleri önce 2. mertebeden Euler denklemi için gerçekleştirelim ($x > 0$ kabul edelim).

$$x^2 y'' + pxy' + qy = 0 \tag{3}$$

denkleminde ($p$, $q$ sabitlerdir), $y = x^k$, $y' = kx^{k-1}$, $y'' = k(k-1)x^{k-2}$ olduğunu göz önüne alırsak,

$$k(k-1)x^k + pkx^k + qx^k = 0 \text{ yani } k^2 + (p-1)k + q = 0 \tag{4}$$

karakteristik denklemini elde ederiz. Köklere bağlı olarak aşağıdaki durumlar olasıdır:

**1. $k_1 \neq k_2$ ve gerçeldirler.** Bu durumda, bağımsız özel çözümler

$$y_1 = x^{k_1} \quad \text{ve} \quad y_2 = x^{k_2}$$

olur ve genel çözüm

$$y = C_1 x^{k_1} + C_2 x^{k_2} \tag{5}$$

olarak yazılabilir.

**2. $k_1 = k_2 \left(= k = -\dfrac{p-1}{2}\right)$.** Bu durumda, $y_1 = x^k$ bir tane özel çözümdür. Doğrusal bağımsız ikinci özel çözümü

$$y = u(x)x^k$$

şeklinde arayıp $u(x)$'i belirleyelim. Bunun için,

$$y = ux^k, \qquad y' = u'x^k + kux^{k-1}, \qquad y'' = u''x^k + 2ku'x^{k-1} + k(k-1)ux^{k-2}$$

ifadelerini (3) denkleminde yazarsak,

$$u''x^{k+2} + 2ku'x^{k+1} + k(k-1)ux^k + pu'x^{k+1} + pkux^k + qux^k = 0$$

yani

$$u''x^2 + (2k + p)u'x + \left[k^2 + (p-1)k + q\right]u = 0$$

elde ederiz. Burada, $k^2 + (p-1)k + q = 0$ ve $2k + p - 1 = 0$ olduğunu ($k$, karakteristik denklemin çakışık kökü olduğundan) göz önüne alırsak,

$$u''x^2 + u'x = 0 \quad \text{veya} \quad u''x + u' = 0$$

olur. Denklemi

$$(u'x)' = 0$$

şeklinde yazıp,

$$u = c_1 \ln x + c_2$$

buluruz. Burada, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ alırsak (herhangi bir özel çözüm arandığından), $u(x) = \ln x$ olur. Böylece, ikinci özel çözüm

$$y_2 = x^k \ln x$$

olarak bulunur ve genel çözüm

$$y = C_1 x^k + C_2 x^k \ln x \quad \text{yani} \quad y = (C_1 + C_2 \ln x)x^k$$

şeklinde yazılır.

**Uyarı 1** $y_2 = x^k \ln x$ özel çözümü, Bölüm 3.2'deki (13) formülünün yardımıyla da bulunabilir. Bunu okuyuculara bırakıyoruz.

**3.** $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Bu durumda, $e^{\ln x} = x$ özdeşliğini ve Euler formüllerini kullanarak (bkz. 2, Bölüm 8.14), çözümü aşağıdaki şekilde dönüştürelim:

$$y = x^{\alpha \pm i\beta} = e^{(\alpha \pm i\beta)\ln x} = e^{\alpha \ln x} e^{\pm i\beta \ln x} = x^\alpha \left[\cos(\beta \ln x) \pm i \sin(\beta \ln x)\right],$$

yani

$$y = x^\alpha \cos(\beta \ln x) \pm i x^\alpha \sin(\beta \ln x)$$

Gerçel ve sanal kısımların da ele alınan denklemin çözümleri olacağını göz önüne alır (bkz. Bölüm 3.2) ve buradan özel çözümlerin

$$y_1 = x^\alpha \cos(\beta \ln x), \qquad y_2 = x^\alpha \sin(\beta \ln x)$$

şeklinde olacağı sonucuna varırız. Demek ki, genel çözüm

$$y = x^\alpha \left[C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x)\right] \tag{7}$$

olur.

$x < 0$ durumunda, bulunan özel ve genel çözüm formüllerinde, gerekli yerlerde $x$ yerine $|x|$ yazılır.

**ÖRNEK 1** Aşağıdaki denklemleri çözün.

(a) $x^2y'' + 3xy' - 3y = 0$

(b) $x^2y'' + xy' = 0$

(c) $x^2y'' - 3xy' + 13y = 0$

○ (a) Çözümü $y = x^k$ şeklinde aradığımızda, karakteristik denklem

$$k(k-1) + 3k - 3 = 0$$

olur ve $k_1 = -3, k_2 = 1$ bulunur. O zaman, özel çözümler

$$y_1 = x^{-3}, \qquad y_2 = x$$

genel çözüm ise,

$$y = C_1x^{-3} + C_2x$$

olarak yazılabilir ($x$, negatif ve pozitif değerler alabilir);
(b) Ele alınan denklemin karakteristik denklemi

$$k(k-1) + k = 0 \quad \text{yani} \quad k^2 = 0$$

kökleri ise $k_{1,2} = 0$ (çakışık kökler) olduğundan, özel çözümler

$$y_1 = 1, \qquad y_2 = \ln|x|$$

olur ($x^0 = 1$ olduğundan) ve genel çözüm

$$y = C_1 + C_2 \ln|x|$$

şeklinde yazılır;
(c) Karakteristik denklem,

$$k(k-1) - 3k + 13 = 0$$

kökleri ise $k_{1,2} = 2 \pm 3i$ ($\alpha = 2, \beta = 3$) olduğundan, özel çözümler

$$y_1 = x^2\cos(3\ln|x|), \qquad y_2 = x^2\sin(3\ln|x|)$$

olur ve genel çözüm

$$y = x^2\left[C_1\cos(3\ln|x|) + C_2\sin(3\ln|x|)\right]$$

olarak bulunur. ○

Şimdi, ikinci mertebeden Euler denklemi için elde edilen sonuçlara dayanarak, $n$. mertebeden Euler denkleminin özel çözümlerini bulmak için aşağıdaki pratik yöntemi verelim:

Karakteristik denklem yazılarak bütün kökler ($n$ sayıda) bulunur, tekrarsız $k_i$ gerçel köklerine karşılık birer $x^{k_i}$ özel çözümleri, $r$ defa tekrarlanan $k_m$ gerçel köküne karşın $r$ sayıda $x^{k_m}, x^{k_m}\ln|x|, \ldots, x^{k_m}(\ln|x|)^{r-1}$ özel çözümleri (diğer tekrarlı gerçel kökler için de benzeri yapılır), tekrarsız $\alpha_j \pm i\beta_j$ karmaşık eşlenik köklerine karşılık ikişer $x^{\alpha_j}\cos(\beta_j \ln|x|)$, $x^{\alpha_j}\sin(\beta_j \ln|x|)$ özel çözümleri, $s$ defa tekrarlanan $\alpha \pm i\beta$ karmaşık köklerine karşılık $2s$ sayıda $x^{\alpha}\cos(\beta \ln|x|)$, $x^{\alpha}\sin(\beta \ln|x|)$, $x^{\alpha}\ln|x|\cos(\beta \ln|x|)$, $x^{\alpha}\ln|x|\sin(\beta \ln|x|), \ldots, x^{\alpha}(\ln|x|)^{s-1}\cos(\beta \ln|x|)$, $x^{\alpha}(\ln|x|)^{s-1}\sin(\beta \ln|x|)$ özel çözümleri (diğer tekrarlı karmaşık kökler için de benzeri yapılır) yazılır ve

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n \tag{8}$$

formülü kullanılarak genel çözüm bulunur.

---

**ÖRNEK 2** Aşağıdaki denklemleri çözün.

**(a)** $x^3y''' - 2xy' = 0$ **(b)** $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 7x^2y'' + xy' - y = 0$

○ **(a)** Ele alınan denklemin

$$k(k-1)(k-2) - 2k = 0$$

karakteristik denklemini yazıp $k_{1,2} = 0$ (iki defa tekrarlanan kök), $k_3 = 3$ buluruz. O halde özel çözümler

$$y_1 = 1, \qquad y_2 = \ln|x|, \qquad y_3 = x^3$$

olur ve genel çözüm

$$y = C_1 + C_2\ln|x| + C_3x^3$$

olarak yazılır;

**(b)** Karakteristik denklemi

$$k(k-1)(k-2)(k-3) + 6k(k-1)(k-2) + 7k(k-1) + k - 1 = 0$$

yani

$$(k-1)[k(k-2)(k-3) + 6k(k-2) + 7k + 1] = 0$$

şeklinde yazıp $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ köklerini kolaylıkla bulabiliriz ($-1$ kökü, bağımsız terimin böleni olarak deney yoluyla belirlenir. (bkz. 1, Bölüm 5.5). Bu kökleri göz önüne aldığımızda, diğer iki kökü belirlemek için,

$$k^2 + 1 = 0$$

denklemini elde ederiz. Buradan $k_{3,4} = \pm i$ bulunur. Böylece, ele alınan denklemin özel çözümleri

$$y_1 = x, \qquad y_2 = x^{-1}, \quad y_3 = \cos(\ln|x|), \qquad y_4 = \sin(\ln|x|)$$

olur ve genel çözüm

$$y = C_1 x + C_2 x^{-1} + C_3 \cos(\ln|x|) + C_4 \sin(\ln|x|)$$

olarak bulunur. ○

---

**Uyarı 2** Türdeş olmayan Euler denklemini çözmek için, türdeş kısmın genel çözümünü bulup sabitlerin değiştirilmesi yönteminden yararlanmak daha elverişlidir. Burada da Bölüm 3.4'teki Uyarı 2'ye uymak gerekir.

---

**ÖRNEK 3** $xy'' - y' = 2x^2$, $y(1) = 2/3$, $y'(1) = 1$ başlangıç değer problemini çözün.

○ Önce, $xy'' - y' = 0$ yani $x^2 y'' - xy' = 0$ türdeş denklemini çözelim. Karakteristik denklem ve köklerinin

$$k(k-1) - k = 0, \qquad k_1 = 0, \qquad k_2 = 2$$

olacağı açıktır. Böylece, türdeş denklemin genel çözümü

$$y_T = C_1 + C_2 x^2$$

olur. Burada sabitleri $x$'e bağlı, yani $C_1(x)$ ve $C_2(x)$ olarak kabul edelim ve bunları

$$y = C_1(x) + C_2(x)x^2$$

fonksiyonu, verilen denklemi sağlayacak biçimde seçelim.

Bunun için, denklemi $y'' - \frac{1}{x} y' = 2x$ şeklinde yazıp, belli yöntemle (bkz. Bölüm 3.4),

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)x^2 = 0, \\ \qquad\qquad 2C_2'(x)x = 2x \end{cases}$$

sistemini yazarsak, $C_2'(x) = 1$, $C_1'(x) = -x^2$, buradan da

$$C_2(x) = x + C_2^{\circ}, \qquad C_1(x) = -\frac{x^3}{3} + C_1^{\circ}$$

buluruz. Böylece, ele alınan denklemin genel çözümü

$$y = C_1^{\circ} + C_2^{\circ} x^2 + \frac{2}{3} x^3$$

olarak bulunur.

Şimdi, $C_1^o$ ve $C_2^o$ sabitlerini başlangıç koşulları sağlanacak şekilde seçelim:

$$\begin{cases} \frac{2}{3} = C_1^o + C_2^o + \frac{2}{3} \\ -2 = 2C_2^o + 2 \end{cases} \quad \text{veya} \quad \begin{cases} C_1^o + C_2^o = 0 \\ C_2^o = -2 \end{cases}$$

yani,

$$C_1^o = 2, \; C_2^o = -2$$

Bulunan $C_1^o$ ve $C_2^o$'ı genel çözümün ifadesinde yazarsak, aranan özel çözümü

$$y = 2 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^3$$

olarak buluruz. ○

---

**Uyarı 3** $(ax+b)^n y^{(n)} + p_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(ax+b)y' + p_n y = 0$ şeklindeki denklemler de, Euler denklemi diye adlandırılır ve $ax + b = t$ değişken değiştirmesinin yardımıyla Euler denklemine dönüştürülür.

---

**ÖRNEK 4** $(2x+3)^2 y'' + 3(2x+3)y' + y = 0$ denklemini çözün.

○ $2x + 3 = t$ kabul edersek, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 2\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dx^2} = 4\frac{d^2y}{dt^2}$ olur ve ele alınan denklem

$$4t^2 y''_{tt} + 6ty'_t + y = 0$$

şeklinde yazılabilir. Çözüm $y = t^k$ şeklinde arandığında, karakteristik denklem

$$4k(k-1) + 6k + 1 = 0 \qquad \text{yani} \qquad 4k^2 + 2k + 1 = 0$$

kökleri ise $k_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{3}}{4}$ olur ve özel çözümler

$$y_1 = |t|^{-1/4} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\ln|t|\right), \qquad y_2 = |t|^{-1/4} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\ln|t|\right)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu özel çözümleri, $x$ cinsinden

$$y_1 = |2x+3|^{-1/4}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\ln|2x+3|\right), \qquad y_2 = |2x+3|^{-1/4}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\ln|2x+3|\right)$$

olarak gösterip verilen denklemin

$$y = |2x+3|^{-1/4}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\ln|2x+3|\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\ln|2x+3|\right)\right]$$

genel çözümünü buluruz. ○

---

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 3.7 için)

**1.** $x = e^t$ $(x > 0)$ ve $x = -e^t$ $(x < 0)$ değişken değiştirmesinin yardımıyla $x^2y'' + pxy' + q = 0$ Euler denkleminin, sabit katsayılı,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (p-1)\frac{dy}{dt} + qy = 0$$

denklemine dönüştüğünü gösterin.

**2.** Aşağıdaki denklemleri çözün.

**(a)** $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$ **(b)** $x^2y'' + 3xy' + y = 0$

**(c)** $x^2y'' + xy' + 4y = 0$ **(d)** $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

**(e)** $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ **(f)** $x^2y'' + 4xy' + 3y = 0$

**(g)** $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ **(h)** $x^2y'' - 3xy' = 0$

**(i)** $x^2y'' + y = 0$ **(j)** $x^2y''' - 2y' = 0$

**(k)** $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$

**3.** Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün.

**(a)** $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, y(1) = 1, y'(1) = -2$

**(b)** $x^2y'' + xy' + 4y = 0, y(1) = -1, y'(1) = 4$

**(c)** $x^2y'' + xy' - y = \dfrac{1}{x+1}, y(1) = \dfrac{1}{2}, y'(1) = 4$

**(d)** $x^2y'' + xy' + y = 2\sin(\ln x), y(1) = 1, y'(1) = 0$

**4.** Aşağıdaki denklemleri çözün.

**(a)** $(x+3)^2y'' + 3(x+3)y' + y = 0$

(b) $(x-1)^2 y'' + 3(x-1)y' - 3y = 0$

(c) $(2x+1)^2 y'' + 2(2x+1)y' - 4y = 0$

(d) $(x+2)^3 y''' - 2(x+2)y' + 2y = 0$

(e) $(x-2)^3 y''' + 4(x-2)y' - 8y = 0$

(f) $(x+3)^3 y''' + 3(x+3)^2 y'' - 2(x+3)y' - 2y = 0$

5. Aşağıdaki denklemlerin genel çözümünü bulun.

(a) $x^2 y'' + xy' + y = x$

(b) $x^2 y'' - xy' + y = 6x \ln x$

(c) $x^2 y'' - xy' = -x + \dfrac{3}{x}$

(d) $x^2 y'' + xy' + y = 2 \sin \ln x$

(e) $x^2 y'' - xy' + y = 2x$

(f) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^3 - x$

## 3.8 DİFERANSİYEL DENKLEMLER SİSTEMİ

### 3.8.1 Diferansiyel Denklemler Sistemini Gerektiren Problemler

*1. Maddenin Ayrışması.* Başlangıç kütlesi $m$ olan $M$ maddesi, $X$ ve $Y$ olmak üzere iki maddeye ayrışmaktadır. Ayrışmadan elde edilen maddelerin her birinin oluşma hızının, ayrışmamış maddenin kütlesiyle orantılı olduğu (orantı katsayıları sırasıyla $k_x$ ve $k_y$ olsun) bilindiğine göre, bunların $t$ anındaki $x(t)$ ve $y(t)$ kütlelerinin bulunma kuralını belirleyin.

○ Maddelerin oluşma hızlarının sırasıyla $x'(t)$ ve $y'(t)$, $t$ anında ayrışmamış maddenin kütlesi ise $m - x(t) - y(t)$ olduğunu göz önüne alırsak, koşula göre,

$$\begin{cases} x'(t) = mk_x[m - x(t) - y(t)] \\ y'(t) = mk_y[m - x(t) - y(t)] \end{cases} \tag{1}$$

yazabiliriz. Görüldüğü gibi (1), aranan fonksiyonların türevini içeren bir sistem, yani *diferansiyel denklemler sistemidir.*

Demek ki, ayrışmadan elde edilen maddelerin kütlelerinin bulunma kuralı, (1) şeklindeki diferansiyel denklemler sistemiyle belirlenir.

Başlangıç anında $(t = 0)$ oluşan maddelerin kütlesinin sıfır olduğunu göz önüne alırsak,

$$x(0) = y(0) = 0 \tag{2}$$

başlangıç koşullarını yazabiliriz.

Böylece, ele alınan problemin çözümü, (1) diferansiyel denklemler sisteminin (2) başlangıç koşullarını sağlayan çözümünün bulunmasına (Cauchy problemi) denktir. O

2. *Maddesel Noktanın Hareket Yasası.* Bilindiği gibi, $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ kuvvetinin etkisiyle, kütlesi $m$ olan maddesel $M$ noktasının yaptığı hareket, Newton yasasına ve ikinci mertebeden türevin mekanik anlamına göre,

$$m\frac{d^2\mathbf{F}}{dt^2} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \tag{3}$$

denklemiyle verilir. Burada $t$, zaman, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ise $R^3$'te $M(x, y, z)$ noktasının yarıçap (yer) vektörüdür (bkz. 2. Bölüm 10.2). Demek ki, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ olup bunlar aynı zamanda $\mathbf{r}(t)$ vektörünün bileşenleridir: $\mathbf{r}\{x(t), y(t), z(t)\}$.

$\mathbf{F}$ vektörünün bileşenlerini $X, Y, Z$ ile gösterirsek ($\mathbf{F}\{X, Y, Z\}$),

$$X = X(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t))$$

$$Y = Y(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t))$$

$$Z = Z(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t))$$

olacağı açıktır ($t \in [t_0, T]$).

Söylenenleri göz önüne alıp (3) denklemini koordinatlarla

$$\begin{cases} mx''(t) = X(t, x, y, z, x', y', z') \\ my''(t) = Y(t, x, y, z, x', y', z') \\ mz''(t) = Z(t, x, y, z, x', y', z') \end{cases} \tag{4}$$

şeklinde yazabiliriz. Demek ki, *maddesel noktanın hareket yasası,* ikinci mertebeden diferansiyel denklemler sistemiyle belirlenmektedir.

Ele alınan örnekler, diferansiyel denklemler sisteminin neden öğrenilmesi gerektiğine işaret etmektedir.

### 3.8.2 Diferansiyel Denklemler Sisteminin Temel Kavramları.

$f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ fonksiyonlarının, $R^{n+1}$'in herhangi $\Omega$ bölgesinde tanımlı, bilinen fonksiyonlar olduğunu varsayıp,

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)$$

denklemlerinden oluşan ($i = \overline{1, n}$),

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \quad \text{veya} \quad \frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \quad (i = \overline{1, n}) \qquad (5)$$

sistemini ele alalım. Burada $x_i = x_i(t)$, bilinmeyen fonksiyonlardır $(i = \overline{1, n}, t \in [t_0, T))$.

(5) şeklindeki sisteme (yani aranan fonksiyonların türevlerine göre çözülmüş sisteme), *normal sistem* veya *normal diferansiyel denklemler sistemi* denir.

Normal sistemin sağ tarafı doğrudan $t$ 'yi içermediğinde elde edilen

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \quad (i = \overline{1, n}) \qquad (5^*)$$

sistemi, *özerk sistem* diye adlandırılır. Örneğin (1), özerk sistemdir.

(5) sisteminin,

$$x_1(t_0) = x_{10}, x_2(t_0) = x_{20}, ..., x_n(t_0) = x_{n0}$$

veya

$$x_i(t_0) = x_{i0} \quad (i = \overline{1, n}, \ (t_0, x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) \in \Omega) \qquad (6)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümünün bulunmasına, *normal sistem için başlangıç değer problemi* veya *Cauchy problemi* denir.

(5)-(6) başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliğiyle ilgili, ispatsız kabul edeceğimiz aşağıdaki teorem doğrudur.

**TEOREM (varlık ve teklik).** $f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ fonksiyonları $\Omega \subset R^{n+1}$ bölgesinde sürekli olup $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sürekli kısmi türevlerine sahipse $(i, j = \overline{1, n})$, o zaman her $(t_0, x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) \in \Omega$ noktası için, $t_0$ 'ı içeren bir $(a, b)$ aralığı ve bu aralıkta (5)-(6) başlangıç değer probleminin tek bir çözümü vardır.

$R^n$ 'de $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\}$, $\mathbf{x}_0 = \{x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}\}$, $\mathbf{f}(t, x(t)) = \{f_1(t, x_1, ..., x_n), ..., f_n(t, x_1, ..., x_n)\}$ kabul edersek, (5) sistemini,

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \qquad (5v)$$

olarak, (6) başlangıç koşullarını ise

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{6v}$$

olarak vektör şeklinde yazabiliriz. Benzer biçimde, $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \{f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_n(x_1, ..., x_n)\}$ kabul edildiğinde, özerk sistem,

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \tag{5*v}$$

şeklinde yazılabilir. Örneğin, $R^2$'de $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t)t)\}$ ve $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \{k_x(a - x_1 - x_2), k_y(a - x_1 - x_2)\}$ kabul edildiğinde, (1) özerk sistemi

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \tag{1v}$$

şeklini alır.

**Tanım** $n$ sayıda keyfi sabite bağlı $x_i = \varphi_i(t, C_1, C_2, ..., C_n)$ fonksiyonları $(i = \overline{1,n})$, (5) sistemini sağlıyorsa ve bu sabitler (6) başlangıç koşullarına göre tek değerli olarak bulunabiliyorsa, o zaman, sözü edilen fonksiyonlara, (5) *sisteminin genel çözümü* denir. Sabitlerin çeşitli değerlerinde genel çözümden elde edilen çözümlere ise *sistemin özel çözümleri* denir.

Yüksek mertebeden denklemlerde olduğu gibi, diferansiyel denklemler sistemlerinin de çözümü için genel bir yöntem yoktur (kimi özel durumlar ve sabit katsayılı doğrusal diferansiyel denklemler sistemi hariç). Bu nedenle, diferansiyel denklemler sistemini çözmek için:

(a) sistem, belirli koşullar dahilinde, yüksek mertebeden bir denkleme dönüştürülüp belli yöntemlerin biriyle çözülür (eğer mümkünse);
(b) duruma bağlı olarak, çeşitli yapay yöntemler uygulanır;
(c) yaklaşık yöntemler uygulanır (bkz. Bölüm 4).

Önce, diferansiyel denklemler sisteminin, doğrudan çözülebilir aşağıdaki özel durumlarını inceleyelim.

1. Diferansiyel denklemler sisteminin her denklemi yalnız bir bilinmeyen fonksiyon içerebilir, yani sistem

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_n) \end{cases}$$

şeklinde olabilir. Bu durumda, sistemin denklemlerini tek tek integrallemek gerekir. Örneğin,

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = tx_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = te^{t-x_2} \end{cases}$$

sisteminin çözümü

$$\begin{cases} dx_1 = tdt \\ e^{x_2}dx_2 = te^t dt \end{cases} \text{ yani } x_1 = \frac{1}{2}t^2 + C_1, x_2 = \ln\left|e^t(t-1) + C_2\right|$$

olarak bulunur.

**2.** Diferansiyel denklemler sistemi

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

biçiminde olabilir (yani, keyfi $i$ için $i$. denklem yalnız $x_1, x_2, \dots, x_i$ bilinmeyenlerini içeriyor. $i = \overline{1, n}$). O zaman, ardarda olmak üzere, önce 1. denklem çözülür, sonra sonuç 2. denklemde yazılıp elde edilen denklem çözülür vb.

---

**ÖRNEK 1** Aşağıdaki sistemi çözün.

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{2t}{1+t^2}x_1 \\ x_2' = x_1 - \dfrac{1}{t}x_2 + t \end{cases}$$

○ Görüldüğü gibi, sistemin 1. denklemi $x_2$ bilinmeyenini içermiyor. Bu nedenle önce onu çözelim:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{2t}{1+t^2}dt \Rightarrow \ln|x_1| = \ln(1+t^2) + \ln C_1 \Rightarrow x_1 = C_1(1+t^2)$$

$x_1$'in ifadesini 2. denklemde yazarsak,

$$x_2' = C_1(1+t^2) + t - \frac{1}{t}x_2 \Rightarrow x_2' + \frac{1}{t}x_2 = C_1(1+t^2) + t$$

yani doğrusal denklem elde ederiz. Buradan, doğrusal denklemin çözüm formülünün yardımıyla (bkz. Bölüm 2.6),

$$x_2 = e^{-\int \frac{dt}{t}} \left\{ \int [C_1(1+t^2)+t] e^{\int \frac{dt}{t}} dt + C_2 \right\}$$

$$x_2 = \frac{1}{t} \left\{ \int [C_1(1+t^2)+t] t dt + C_2 \right\}$$

$$x_2 = \frac{C_1}{4} t(2+t^2) + \frac{C_2}{t} + \frac{t^2}{3}$$

buluruz. Böylece, ele alınan sistemin genel çözümü

$$x_1 = C_1(1+t^2), \qquad x_2 = \frac{C_1}{4} t(2+t^2) + \frac{C_2}{t} + \frac{t^2}{3}$$

olur. ○

---

Şimdi, diferansiyel denklemler sisteminin bir tane yüksek mertebeden denkleme dönüştürülmesi yöntemini, iki denklemden oluşan

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2) \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2) \end{cases} \tag{7}$$

sistemi için açıklayalım. Burada, $f_i(t, x_1, x_2)$ fonksiyonlarının $(i = 1,2)$ herhangi $\Omega \subset R^3$ bölgesinde sürekli olup gerekli koşulları sağladığını kabul edelim. Sistemin 1. denkleminin her iki tarafının $t$'ye göre türevini alıp elde edilen

$$x_1'' = f_{1t}'(t, x_1, x_2) + f_{1x_1}'(t, x_1, x_2) x_1' + f_{1x_2}'(t, x_1, x_2) x_2'$$

denkleminde, $x_1'$ ve $x_2'$ yerine (7) sistemindeki ifadelerini yazalım:

$$\begin{aligned} x_1'' = {} & f_{1t}'(t, x_1, x_2) + f_{1x_1}'(t, x_1, x_2) f_1(t, x_1, x_2) + \\ & f_{1x_2}'(t, x_1, x_2) f_2(t, x_1, x_2) \end{aligned} \tag{8}$$

(7) sisteminin 1. denkleminden $x_2$'yi bulup ($x_2 = \varphi(t, x_1, x_1')$ olsun) (8) denkleminde yazarsak,

$$x_1'' = f_{1t}'[t, x_1, \varphi(t, x_1, x_1')] + f_{1x_1}'[t, x_1, \varphi(t, x_1, x_1')] f_1[t, x_1, \varphi(t, x_1, x_1')] +$$
$$f_{1x_2}'[t, x_1, \varphi(t, x_1, x_1')] f_2[t, x_1, \varphi(t, x_1, x_1')]$$

yani

$$x_1'' = F(t, x_1, x_1')$$

şeklinde, 2. mertebeden diferansiyel denklem elde ederiz. Böylece, iki tane 1. mertebeden denklemden oluşan (7) sistemi, bir tane 2. mertebeden denkleme dönüştürülmüş olur.

Benzer yolla, (5) şeklindeki sistem, $n$ kere veya daha az sayıda ardarda diferansiyelleme yoluyla, bir tane mertebesi $n$ 'yi aşmayan denkleme dönüştürülebilir (işlem yapılırken, $x_2, x_3, ..., x_n$ fonksiyonlarının $n-1$ sayıda değil de daha az sayıda denklemden belirlenebildiği durumlarda, denklemin mertebesi $n$ 'den küçük olabilir. Bkz. Örnek 3).

---

**ÖRNEK 2** (1)-(2) problemini çözün.

○ Önce (1) sistemini bir tane denkleme dönüştürelim. Bunun için, birinci denklemin her iki tarafının $t$ 'ye göre türevini alıp elde edilen

$$x'' = -mk_x(x' + y')$$

denkleminde sistemin denklemlerini göz önüne alalım. Böylece,

$$x'' = -mk_x(k_x + k_y)(m - x - y)$$

$$x'' = -mk_x(k_x + k_y)\frac{x'}{k_x}$$

$$x'' + m(k_x + k_y)x' = 0$$

olur. Yani sabit katsayılı 2. mertebeden doğrusal türdeş denklem elde edilir. Bunun genel çözümünün

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-m(k_x+k_y)t}$$

şeklinde olacağı açıktır. Bulunan $x(t)$ 'yi sistemin birinci denkleminde göz önüne aldığımızda,

$$y(t) = m - C_1 + C_2 \frac{k_y}{k_x} e^{-m(k_x+k_y)t}$$

buluruz. Böylece (1) sisteminin genel çözümü

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-m(k_x+k_y)t}, \quad y(t) = m - C_1 + C_2 \frac{k_y}{k_x} e^{-m(k_x+k_y)t}$$

olur. Başlangıç koşullarını genel çözümde göz önüne alıp $C_1$ ve $C_2$ sabitlerini

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 0 = m - C_1 + \dfrac{k_y}{k_x} C_2 \end{cases} \quad \text{yani } C_1 = \frac{k_x m}{k_x + k_y} \quad C_2 = -\frac{k_x m}{k_x + k_y}$$

olarak buluruz. O zaman, (1)-(2) probleminin çözümü

$$x(t) = \frac{k_x m}{k_x + k_y}\left[1 - e^{-m(k_x+k_y)t}\right], \; y(t) = \frac{k_y m}{k_x + k_y}\left[1 - e^{-m(k_x+k_y)t}\right] \tag{9}$$

olur.

Demek ki, maddenin ayrışmasında oluşan $X$ ve $Y$ maddelerinin herhangi $t$ anındaki miktarı (9) eşitlikleriyle belirlenir. ○

---

**ÖRNEK 3** Aşağıdaki denklemler sistemini çözün.

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + x_3 \\ x_2' = x_3 + x_1 \quad x_i = x_i(t) = ? \quad (i = 1,2,3) \\ x_3' = x_1 + x_2 \end{cases}$$

○ Sistemin birinci denkleminin her iki tarafının $t$'ye göre türevini alıp ikinci ve üçüncü denklemi göz önüne alırsak,

$$x_1'' = x_2' + x_3'$$

$$x_1'' = x_3 + x_1 + x_1 + x_2 \qquad \text{yani} \qquad x_1'' = 2x_1 + (x_2 + x_3)$$

olur. Burada, sistemin birinci denkleminde $x + x_3 = x_1'$ olduğunu göz önüne alırsak,

$$x_1'' = 2x_1 + x_1' \qquad \text{yani} \qquad x_1'' - x_1' - 2x_1 = 0$$

şeklinde bir denklem elde ederiz. Bunun karakteristik denklemi ve kökleri

$$k^2 - k - 2 = 0, \; k_1 = -1, \; k_2 = 2$$

olduğundan, genel çözümü

$$x_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$$

olur. Buradan, $x_1'(t) = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t}$ bulur ve sistemin birinci denkleminden,

$$x_2 + x_3 = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} \quad (*)$$

yazabiliriz.

Sistemin ikinci ve üçüncü denklemlerini taraf tarafa çıkardığımızda ise,

$$x_2' - x_3' = x_3 - x_2 \quad \text{yani} \quad (x_2 - x_3)' = -(x_2 - x_3)$$

olur ve buradan,

$$x_2 - x_3 = C_3 e^{-t} \qquad (**)$$

buluruz. (*) ve (**) eşitliklerinden,

$$x_2 = -\frac{1}{2}(C_1 - C_3)e^{-t} + C_2 e^{2t}, \qquad x_3 = -\frac{1}{2}(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2 e^{2t}$$

elde edilir. Böylece, ele alınan sistemin genel çözümü

$$x_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(C_1 - C_3)e^{-t} + C_2 e^{2t}$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2 e^{2t}$$

olarak bulunur.

Görüldüğü gibi, verilen sistem, üçüncü mertebeden değil, ikinci mertebeden denkleme dönüştürüldü. ○

---

Diferansiyel denklemler sistemi, yüksek mertebeden türevler içerdiğinde de, sistem, yukarıdakine benzer şekilde, bir tane yüksek mertebeden denkleme dönüştürülebilir. Bunu bir örnekle açıklayalım.

---

**ÖRNEK 4** Aşağıdaki sistemi çözün.

$$\begin{cases} x'' - y = 0 \\ t^3 y' - 6x = 0 \end{cases}$$

○ Sistemin birinci denkleminin her iki tarafının $t$ 'ye göre türevini alıp ikinci denklemi kullanırsak,

$$x''' - y' = 0$$

$$x''' - \frac{6x}{t^3} = 0$$

yani

$$t^3 x''' - 6x = 0$$

Euler denklemini elde ederiz. Çözümü $x = t^k$ şeklinde arayıp, karakteristik denklem ve köklerini

$$k(k-1)(k-2)-6=0, \qquad k_1=3, \qquad k_{2,3}=\pm i\sqrt{2}$$

olarak buluruz. O zaman, denklemin genel çözümü

$$x(t)=C_1t^3+C_2\cos(\sqrt{2}\ln t)+C_3\sin(\sqrt{2}\ln t)$$

olur. Buradan, sistemin birinci denklemine göre,

$$y(t)=6C_1t-\frac{\sqrt{2}}{t^2}\left[(C_2-\sqrt{2}C_3)\sin(\sqrt{2}\ln t)-(\sqrt{2}C_2+C_3)\cos(\sqrt{2}\ln t)\right]$$

bulunur. Böylece, ele alınan sistemin genel çözümü

$$x(t)=C_1t^3+C_2\cos(\sqrt{2}\ln t)+C_3\sin(\sqrt{2}\ln t)$$

$$y(t)=6C_1t-\frac{\sqrt{2}}{t^2}\left[(C_2-\sqrt{2}C_3)\sin(\sqrt{2}\ln t)-(\sqrt{2}C_2+C_3)\cos(\sqrt{2}\ln t)\right]$$

olur. ○

---

Diferansiyel denklemler sistemi bir tane yüksek mertebeden denkleme dönüştürüldüğü gibi, bir tane yüksek mertebeden denklem de diferansiyel denklemler sistemine dönüştürülebilir. Bunu, normal şekilde verilmiş $n$. mertebeden denklem için açıklayalım. Bunun için,

$$x^{(n)}=f(t,x,x',x'',\ldots,x^{(n-1)}) \tag{10}$$

denklemini ele alalım ve $x(t)=x_1(t)$ kabul edip $x_2(t),x_3(t),\ldots,x_n(t)$ fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım ($x_i(t)$, bilinmeyen yeni fonksiyonlardır. $i=\overline{1,n}$):

$$x'(t)=x_1'(t)=x_2(t)$$
$$x''(t)=x_2'(t)=x_3(t)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^{(n-1)}(t)=x_{n-1}'(t)=x_n(t)$$
$$x^{(n)}(t)=x_n'(t)=f[t,x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)]$$

Böylece, (10) denklemini,

$$\begin{cases} x_1'(t)=x_2(t) \\ x_2'(t)=x_3(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}'(t)=x_n(t) \\ x_n'(t)=f[t,x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)] \end{cases} \tag{11}$$

şeklinde, normal bir sisteme dönüştürmüş oluruz. Örneğin, açıklanan yöntemin yardımıyla,

$$x''' = 2tx'' - 3t^2x' + x - 5t^4$$

denklemi,

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = 2tx_3 - 3tx_2 + x_1 - 5t^4 \end{cases}$$

sistemine dönüştürülür ($x_1 = x'$).

### 3.8.3 Sabit Katsayılı Doğrusal Diferansiyel Denklemler Sistemi

Bütün $a_{ij}$ katsayıları ($i, j = \overline{1, n}$) sabit sayılar olduğunda ($a_{ij} \in R$),

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases} \quad \text{veya}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + f_i(t) \quad (i = \overline{1, n}) \tag{12}$$

sistemine, *sabit katsayılı türdeş olmayan doğrusal denklemler sistemi,*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad \text{veya}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \quad (i = \overline{1, n}) \tag{13}$$

sistemine ise (12) *sisteminin türdeş kısmı* veya *doğrusal türdeş denklemler sistemi* denir ($x_i = x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$). Burada da (bkz. Bölüm 1.5),

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

kabul edersek, matrislerin çarpımı ve eşitliğine dayanarak, (12) ve (13) sistemlerini sırasıyla

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F} \tag{12*}$$

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} \tag{13*}$$

şeklinde de yazabiliriz. (12*) ve (13*) yazılışlarına, *sabit katsayılı doğrusal denklemler sisteminin matris şekli* denir.

Doğrusal türdeş denklemlerin Bölüm 3.2.3'te açıkladığımız özellikleri, benzer şekilde doğrusal türdeş denklemler sistemi için de söylenebilir (gerek sabit, gerekse de değişken katsayılı).

Sabit katsayılı doğrusal denklemler sisteminin çözümü, Laplace dönüşümünün yardımıyla Bölüm 5.9'da ayrıntılı olarak açıklandığından dolayı, burada, iki bilinmeyenli sistemin çözüm yönteminin basit açıklaması ile yetinelim.

$x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ bilinmeyen fonksiyonlarını içeren

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \tag{14}$$

doğrusal türdeş denklemler sistemini çözelim (türdeş sistemin açık çözümü her zaman vardır).

Sistemin şeklinden (yani, aranan fonksiyonları ve türevlerinin doğrusal bağımlılığından) görüldüğü gibi, çözümünü

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt}, \; x_2 = \alpha_2 e^{kt} \tag{15}$$

biçiminde aramak gerekir ($k = ?$ $\alpha_1 = ?$ $\alpha_2 = ?$). Buradan, $x_1' = \alpha_1 k e^{kt}$, $x_2' = \alpha_2 k e^{kt}$ buluruz. $x_1$, $x_2$, $x_1'$ ve $x_2'$'nün ifadelerini (14) denkleminde yazıp her tarafı $e^{kt}$'ye bölersek,

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 = 0 \end{cases} \tag{16}$$

doğrusal türdeş denklemler sistemini elde ederiz ($\alpha_1$ ve $\alpha_2$'ye göre).

(16) sisteminin sıfırdan farklı çözümünün olması için (böyle çözüm vardır), sistemin determinantı sıfır olmalıdır (bkz. Bölüm 1.5.4):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

Görüldüğü gibi, (17) eşitliği $k$ bilinmeyenine göre ikinci dereceden denklemdir.

(17) denklemine (14) sistemin *karakteristik denklemi* denir. Bu denklemi çözüp köklerin farklı olduğu durumda (gerçel veya karmaşık) bulunan $k_1$ ve $k_2$ köklerini (16) sisteminde yazarsak, sırasıyla sistemin $(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)})$ ve $(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)})$ olmak üzere temel çözümlerini buluruz. ((16) sisteminde, $n = 2$ ve temel matrisin rankı $r = 1$ olduğundan, $n - r = 1$ olur. Yani, $k_1$ ve $k_2$ için sistemin birer temel çözümü vardır. Bkz. Bölüm 1.5.4). Bu temel çözümlerin yardımıyla, (14) sisteminin

$$x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t}, \quad x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t} \quad \text{ve} \quad x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t}, \quad x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t} \tag{18}$$

temel çözümleri ve

$$x_1 = C_1 \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t}, \qquad x_2 = C_1 \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t} \tag{19}$$

genel çözümü yazılır.

Karakteristik denklemin köklerinin çakışık olduğu durumda ($k_1 = k_2 = k$), (14) sisteminin bir tane sabit katsayılı ikinci mertebeden doğrusal denkleme dönüştürüldüğünü göz önünde bulundurup sistemin çözümünün

$$x_1 = (\alpha_1 + \beta_1 t) e^{kt}, \qquad x_2 = (\alpha_2 + \beta_2 t) e^{kt} \tag{20}$$

şeklinde aranacağını söyleyebiliriz. (20) ifadelerini (14) sisteminde yazıp belirsiz katsayılar yöntemiyle katsayıları buluruz (bunlardan ikisi keyfi değerler alabilir) ve genel çözümü yazarız.

Söylenenleri birer örnekle açıklayalım.

---

**ÖRNEK 5** Aşağıdaki denklem sistemlerini çözün.

(a) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 4x_2 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 \\ x_2' = -x_1 + x_2 \end{cases}$

○ **(a)** Ele alınan denklem için, $a_{11} = 3$, $a_{12} = 4$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 1$ olduğundan, karakteristik denklem

$$\begin{vmatrix} 3 - k & 4 \\ 2 & 1 - k \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{yani} \qquad k^2 - 4k - 5 = 0$$

kökleri ise $k_1 = -1$, $k_2 = 5$ olur.

Katsayılarının değerlerini ve $k_1$, $k_2$ köklerini (16) denkleminde yazıp sırasıyla

$$k_1 = -1 \text{ için } \begin{cases} 4\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_1$$

yani (1, –1) temel çözümünü ($\alpha_1^{(1)} = 1$ kabul ettik, o zaman $\alpha_2^{(1)} = -1$ olur), böylelikle de,

$$k_2 = 5 \text{ için } \begin{cases} -2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_1$$

yani (2, 1) temel çözümünü ($\alpha_1^{(2)} = 2$ kabul ettik, o zaman $\alpha_2^{(2)} = 1$ olur) buluruz.

Bulunan kökleri (15) eşitliklerinde göz önüne alırsak, ele alınan sistemin

$$x_1^{(1)} = e^{-t}, \quad x_2^{(1)} = -e^{-t}, \quad x_1^{(2)} = 2e^{5t}, \quad x_2^{(2)} = e^{5t}$$

özel çözümlerini ve

$$x_1 = C_1e^{-t} + 2C_2e^{5t}, \qquad x_2 = -C_1e^{-t} + C_2e^{5t}$$

genel çözümünü buluruz;

**(b)** $a_{11} = 3$, $a_{12} = -2$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 1$ olduğundan, karakteristik denklem ve kökleri

$$\begin{vmatrix} 3-k & -2 \\ 1 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{yani} \qquad k^2 - 4k + 5 = 0, \; k_{1,2} = 2 \pm i$$

olur. $k_1 = 2 + i$ olduğunu (16) sisteminde yazıp,

$$\begin{cases} (1-i)\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - (1+i)2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (1-i)\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1-i}{2}\alpha_1$$

yani, $(2, 1-i)$ temel çözümünü ($\alpha_1 = 2$ kabul ettik, o zaman, $\alpha_2 = 1 - i$ olur) buluruz ((16) sisteminde $k_2 = 2 - i$ yazıldığında da aynı sonuca varılır). Bulunan $k_1$, $\alpha_1$ ve $\alpha_2$'yi (15) eşitliklerinde yazıp,

$$x_1 = 2e^{(2-i)t} = 2e^{2t}e^{-it} = 2e^{2t}\cos t + i2e^{2t}\sin t$$

$$\begin{aligned} x_2 &= (1-i)e^{(2-i)t} = (1-i)e^{2t}e^{-it} = (1-i)e^{2t}(\cos t + i\sin t) \\ &= e^{2t}[\cos t + \sin t + i(\sin t - \cos t)] \end{aligned}$$

yani,

$$x_1 = 2e^{2t}\cos t + i2e^{2t}\sin t, \qquad x_2 = e^{2t}(\cos t + \sin t) + ie^{2t}(\sin t - \cos t)$$

karmaşık çözümlerini elde ederiz. Burada, gerçel ve sanal kısımların da çözüm olduğunu göz önüne alıp, özel çözümleri

$$x_1^{(1)} = 2e^{2t}\cos t, \qquad x_2^{(1)} = e^{2t}(\cos t + \sin t) \qquad \text{ve}$$

$$x_1^{(2)} = 2e^{2t}\sin t, \qquad x_2^{(2)} = e^{2t}(\sin t - \cos t)$$

olarak buluruz. O zaman, ele alınan sistemin genel çözümü

$$x_1 = 2e^{2t}(C_1\cos t + C_2\sin t), \qquad x_2 = e^{2t}[(C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t]$$

olur;

(c) $a_{11} = 3$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = -1$, $a_{22} = 1$ olduğundan, karakteristik denklem ve kökleri

$$\begin{vmatrix} 3-k & 1 \\ -1 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{yani} \quad k^2 - 4k + 4 = 0, \qquad k_{1,2} = 2 \ \text{(çakışık kökler)}$$

olur. Bu durumda, sistemin çözümünü (20) formülleriyle, yani,

$$x_1 = (\alpha_1 + \beta_1 t)e^{2t}, \qquad x_2 = (\alpha_2 + \beta_2 t)e^{2t}$$

şeklinde aramamız gerekir. $x_1$, $x_2$ ve buradan bulunan

$$x_1' = (\beta_1 + 2\alpha_1 + 2\beta_1 t)e^{2t}, \ x_2' = (\beta_2 + 2\alpha_2 + 2\beta_2 t)e^{2t}$$

ifadelerini ele alınan sistemde yazıp sadeleştirirsek,

$$\begin{cases} \beta_1 + 2\alpha_1 + 2\beta_1 t = 3\alpha_1 + 3\beta_1 t + \alpha_2 + \beta_2 t \\ \beta_2 + 2\alpha_2 + 2\beta_2 t = -\alpha_1 - \beta_1 t + \alpha_2 + \beta_2 t \end{cases}$$

yani

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + (\beta_1 + \beta_2)t \\ \beta_2 = -\alpha_1 - \alpha_2 - (\beta_1 + \beta_2)t \end{cases}$$

elde ederiz. Buradan, belirsiz katsayılar yöntemiyle

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_1 + \beta_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{veya} \qquad \alpha_2 = -\alpha_1 + \beta_1, \qquad \beta_2 = -\beta_1$$

buluruz. Burada $\alpha_1$ ve $\beta_1$ keyfi değerler alabilir. Bunları, sırasıyla $C_1$ ve $C_2$ olarak kabul edip ele alınan sistemin genel çözümünü

$$x_1 = (C_1 + C_2 t)e^{2t}, \qquad x_2 = (-C_1 + C_2 - C_2 t)e^{2t}$$

olarak buluruz. ○

Sistemin denklem sayısı ikiden fazla olduğunda da yukarıdakine benzer şekilde işlemler yapılır.

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 3.8 için)

1. Aşağıdaki denklem sistemlerini bir tane yüksek mertebeden denkleme dönüştürerek çözün.

(a) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = x + 2y \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = x - 3y \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = -x + t \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x' = x - y + t^2 \\ y' = -4x - 2y + 4t \end{cases}$

2. Aşağıdaki denklem sistemlerinin genel çözümlerini bulun.

(a) $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = y \\ y' = 2y \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{t}x \\ y' = x + y \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y + z \\ z' = 2z \end{cases}$

3. Aşağıdaki sabit katsayılı denklem sistemlerini çözün.

(a) $\begin{cases} x_1' = -x_1 + 8x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1' = 12x_1 - 5x_2 \\ x_2' = 5x_1 + 12x_2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1' = x - 2x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1' = x_1 - 4x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 \\ x_2' = -4x_1 - x_2 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x_1' = x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 3x_1 + x_2 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2' = x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3' = 2x_1 - x_2 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2' = -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' = x_1 - x_3 \end{cases}$

**4.** Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün.

(a) $\begin{cases} x_1' = -3x_1 - x_2 \\ x_2' = -5x_1 - x_2 \end{cases} \quad x_1(0) = 1, x_2(0) = -1$

(b) $\begin{cases} x_1' = -3x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases} \quad x_1(0) = -1, x_2(0) = 1$

(c) $\begin{cases} x_1' = x_1 + 3x_2 \\ x_2' = -x_1 + 5x_2 \end{cases} \quad x_1(0) = 3, x_2(0) = 1$

(d) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 7x_2 \end{cases} \quad x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$

(e) $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = x_1 \end{cases} \quad x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$

(f) $\begin{cases} x_1' = x_2 + x_3 \\ x_2' = x_1 + x_3 \\ x_3' = x_1 + x_2 \end{cases} \quad x_1(0) = x_2(0) = 2, x_3(0) = -1$

## 3.9* SINIR DEĞER PROBLEMİ

Şimdiye kadar diferansiyel denklemlerin özel çözümlerini bulmak için, aranan fonksiyonların ve bunların türevlerinin herhangi bir noktadaki değerlerini (başlangıç koşullarını) kullandık. İncelenen problemin Fizik, Teknik vb. anlamlarına bağlı olarak, diğer şekillerde de koşullar verilebilir. Ancak, bütün durumlarda söz konusu koşulların sayısının denklemin mertebe sayısına eşit olması gerekmektedir. Örneğin, hareket kuramında $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ kuvvetinin etkisiyle hareket eden ve $t_0$ başlangıç anında $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0)$ vektörünün belirlediği noktada olan $m$ kütleli maddesel noktanın $t_1$ anında $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_1)$ vektörünün belirlediği noktaya düşmesi problemi,

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

denkleminin,

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \qquad \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$$

koşullarını (*sınır koşulları* ) sağlayan çözümünün bulunması olarak tanımlanır.

Elde edilen problemin çözümünün tek olmadığının altını çizelim. Şöyle ki, balistik problem incelendiğinde, $A$ noktasından $B$ noktasına (Şekil 1*), aşırtma ve yayma olmak üzere, sırasıyla farklı $ApB$ ve $AqB$ yörüngeleriyle ulaşılabilir. Ayrıca, $A$ noktasından $B$ noktasına, Yer etrafında bir veya birkaç kere devir yaptıktan sonra da ulaşılabilir.

Şimdi, konuyu matematiksel olarak açıklamak için, $[a,b]$ aralığında,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{1}$$

ikinci mertebeden diferansiyel denkleminin (sadelik için ikinci mertebeden aldık),

$$\begin{cases} a_1 y(a) + a_2 y'(a) = \alpha_1 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = \alpha_2 \end{cases} \tag{2}$$

koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemini ele alalım. Burada, $p(x)$, $q(x)$ ve $f(x)$, $[a,b]$ aralığında gereken özelliklere sahip, belli fonksiyonlar, $a_1$, $a_2$ $(a_1^2 + a_2^2 \neq 0)$, $b_1$, $b_2$ $(b_1^2 + b_2^2 \neq 0)$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, belli gerçel sabitler, $y(x)$ ise, aranan fonksiyondur.

(2) koşullarına ikinci mertebeden diferansiyel denklem için *sınır koşulları;* (1) denkleminin, (2) koşullarını sağlayan çözümünün bulunmasına ise sözü edilen denklem için *sınır değer problemi* denir (denklem ve sınır koşulları türdeş de olabilirler).

(2) koşulları, özel $a_2 = b_2 = 0$ durumunda, *birinci sınır koşulları* diye adlandırılan,

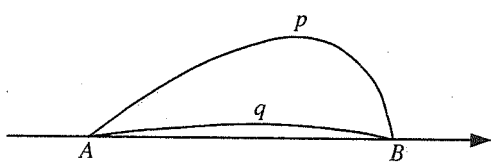
$$y(a) = \alpha_1 / a_1,\ y(b) = \alpha_2 / b_1 \quad \text{veya} \quad y(a) = \beta_1,\ y(b) = \beta_2 \tag{3}$$

koşullarına $a_1 = b_1 = 0$ durumunda ise, *ikinci sınır koşulları* diye adlandırılan,

$$y'(a) = \alpha_1 / a_2,\ y'(b) = \alpha_2 / b_2 \quad \text{veya} \quad y'(a) = \gamma_1,\ y'(b) = \gamma_2 \tag{4}$$

koşullarına dönüşür. Bu yüzden, (2) sınır koşullarına üçü*ncü sınır koşulları* da denir.

Açıklamanın sadeliği için, aşağıdaki incelemeleri (1), (3) problemi için yapalım. Elde edilen sonuçlar (1), (2) ve (1), (4) problemleri, dolayısıyla da




**ŞEKİL 1***

yüksek mertebeden doğrusal diferansiyel denklemlere ait benzer sınır değer problemleri için de geçerlidir.

Bilindiği gibi, (1) denkleminin genel çözümü,

$$y(x) = y_T(x) + \tilde{y}(x) \quad \text{yani} \quad y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \tilde{y}(x) \tag{5}$$

şeklindedir (bkz. Bölüm 3.4). Burada $\tilde{y}(x)$, ele alınan denklemin bir özel çözümü, $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ ise, uygun

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{6}$$

türdeş denkleminin doğrusal bağımsız çözümleridir.

(5) eşitliğindeki $C_1$ ve $C_2$ sabitlerini belirlemek için, (3) sınır koşullarını kullanalım:

$$\begin{cases} C_1 y_1(a) + C_2 y_2(a) = \beta_1 - \tilde{y}(a) \\ C_1 y_1(b) + C_2 y_2(b) = \beta_2 - \tilde{y}(b) \end{cases} \tag{7}$$

Elde edilen doğrusal cebirsel denklem sisteminin çözümü için,

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \beta_1 - \tilde{y}(a) & y_2(a) \\ \beta_2 - \tilde{y}(b) & y_2(b) \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1(a) & \beta_1 - \tilde{y}(a) \\ y_1(b) & \beta_2 - \tilde{y}(b) \end{vmatrix}$$

determinantlarına bağlı olarak, aşağıdaki iki durum söz konusudur (bkz. Bölüm 1.5).

**1. Esas Durum** $(\Delta \neq 0)$. Bu durumda (7) sisteminin,

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

olmak üzere tek çözüm vardır. O halde, (1), (3) sınır değer probleminin de, (5) biçiminde olmak üzere tek çözümü vardır. (Görüldüğü gibi, esas durumda,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad y(a) = y(b) = 0$$

türdeş probleminin yalnız $y(x) = 0$ (açık) çözümü vardır.)

**2. Tekil Durum** $(\Delta = 0)$. Bu durumda da, $f(x)$ ($\tilde{y}(x)$ özel çözümü $f(x)$'e bağlıdır) ve $\beta_1$, $\beta_2$'ye bağlı olarak, $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 \neq 0$ ve $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 = 0$ $(\Delta_1 = \Delta_2 = 0)$ olmak üzere iki olanak vardır.

**(a)** $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 \neq 0$ olduğunda, (7) sisteminin, aynı zamanda (1), (3) sınır değer probleminin çözümü yoktur;

**(b)** $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 = 0$ $(\Delta_1 = \Delta_2 = 0)$ olduğunda ise, (7) sisteminin, aynı zamanda (1), (3) sınır değer probleminin sonsuz sayıda çözümü vardır

(görüldüğü gibi, $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 \neq 0$ veya $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 = 0$ oluşu, $f(x)$ ve $\beta_1$, $\beta_2$ 'ye bağlıdır).

---

**ÖRNEK 1** $y'' + 4y = 3\sin x$ denkleminin ($p(x) = 0$, $q(x) = 4$, $f(x) = 3\sin x$),

**(a)** $y(0) + 2y'(0) = 1$, $y(\pi/2) + 3y'(\pi/2) = 2$

**(b)** $y(0) = 1$, $y(\pi/4) = -2$

**(c)** $y(0) = 1$, $y(\pi) = 2$

**(d)** $y(0) = 1$, $y(\pi) = 1$

sınır koşullarını sağlayan çözümlerini bulun.

○ Önce, ele alınan denklemin türdeş kısmının özel ve genel çözümlerini bulalım:

$$y'' + 4y = 0 \Rightarrow k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k = \pm 2i$$

$$y_1(x) = \cos 2x, \qquad y_2(x) = \sin 2x, \qquad y_T(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

Sağ tarafın şekline bağlı olarak, verilen denklemin bir özel çözümünün,

$$\tilde{y}(x) = A\cos x + B\sin x$$

şeklinde aranacağı açıktır (bkz. Bölüm 3.5). Burada, $A = 0$ olacağı karakteristik denklemin köklerinin biçiminden görülmektedir. Bu nedenle,

$$\tilde{y}(x) = B\sin x, \qquad \tilde{y}''(x) = -B\sin x$$

olur. Son ifadeleri denklemde yazıp $B$ 'yi belirleyelim:

$$-B\sin x + 4B\sin x = 3\sin x \Rightarrow B = 1$$

Böylece, denklemin bir özel çözümü,

$$\tilde{y}(x) = \sin x$$

genel çözümü ise,

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \sin x$$

olur.

Şimdi, her seçenek için verilen sınır koşullarını göz önüne alıp $C_1$ ve $C_2$ 'nin varlığını tek tek inceleyelim.

**(a)** Bu seçenek için, genel çözümü ve bunun

$$y'(x) = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x + \cos x$$

türevini sınır koşullarında göz önüne alırsak,

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + 2(2C_2 + 1) = 1 \\ C_1(-1) + 1 + 3(-2C_2) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + 4C_2 = -1 \\ -C_1 - 6C_2 = 1 \end{cases}$$

olur ve

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = -2 \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 2 \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan, sistemin tek çözümü $C_1 = -1$, $C_2 = 0$ olarak bulunur.

Demek ki, verilen sınır değer probleminin,

$$y(x) = -\cos 2x + \sin x$$

olmak üzere bir tek çözümü vardır;

**(b)** Genel çözümü sınır koşullarında göz önüne alırsak,

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + +C_2 \cdot 0 + 0 = 1 \\ C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 1,\ C_2 = -\frac{4+\sqrt{2}}{2}$$

olur. Yani sistemin tek çözümü vardır. O zaman, verilen sınır değer probleminin de

$$y(x) = \cos 2x - \frac{4+\sqrt{2}}{2}\sin 2x + \sin x$$

olmak üzere bir tek çözümü vardır;

**(c)** Sınır koşullarını genel çözümde göz önüne alırsak,

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + 0 = 1 \\ C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_1 = 2 \end{cases}$$

olur ve sistemin çözümünün olmadığı sonucuna varırız ($\Delta = \Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 1$ olduğundan). Demek ki, verilen problemin çözümü yoktur;

**(d)** Yine, genel çözümü sınır koşullarında göz önüne alırsak,

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + 0 = 1 \\ C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + 0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 \text{ keyfi} \end{cases} \quad (\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0)$$

olur, yani sistemin $(1, C_2)$ olmak üzere sonsuz sayıda çözümü vardır ($C_2$, keyfi değerler alır). Böylece, verilen problemin,

$$y(x) = C_2 \sin 2x + \sin x$$

olmak üzere sonsuz sayıda çözümü vardır. ○

İncelenen örneğin seçeneklerinden görüldüğü gibi,

1. Denklemin sağ tarafına $(f(x))$, aynı zamanda sınır koşullarının sağ tarafına $(\alpha_1, \alpha_2$ veya $\beta_1, \beta_2)$ bağlı olarak, aynı bir denklem için farklı sınır koşullarında sınır değer probleminin çözümü tek olabilir, olmayabilir veya sonsuz sayıda olabilir.
2. Sınır değer probleminin tek çözümü olduğunda, ona uygun türdeş sınır değer probleminin yalnız $y(x) = 0$ (açık) çözümü vardır.
3. Sınır değer probleminin çözümünün olmadığı veya sonsuz sayıda olduğu durumlarda, ona uygun türdeş sınır değer probleminin sıfırdan farklı çözümü vardır.

### ALIŞTIRMALAR (Bölüm 3.9 için)

1. Aşağıdaki koşullarda, $y'' - y = x + 3$ denklemi için sınır değer problemlerini çözün.

   (a) $y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 1$ (b) $y(0) = 0,\ y(\pi) = \pi$

   (c) $y(0) = 0,\ y(\pi) = 1$

2. Aşağıdaki sınır değer problemlerini çözün.

   (a) $y'' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y(\pi/2) = -1$

   (b) $y'' - y = 0,\ y(0) = 1,\ y(1) = 2$

   (c) $y'' - 2y = 0,\ y(0) = 0,\ y(1/2) = e - 1$

   (d) $y'' + y' - 2y = 0,\ y(0) = 0,\ y(1) = e - 1/e^2$

   (e) $y'' + 2y' + y = 1,\ y(0) = y(1) = 0$

   (f) $y'' + 3y' - 4y = 5e^x,\ y(0) = y(2) = 0$

   (g) $y'' - y = x + 3,\ y(0) = 1,\ y(1) = -1$

   (h) $y'' + 4y = e^x,\ y(0) = 1,\ y(\pi/4) = e^{\pi/4}$

   (i) $y'' + y' = x - 1,\ y(0) = 1,\ y(2) = 0$

   (j) $y'' + y = 3\cos 2x,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 1$

   (k) $y'' + y = 2x + 1,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 2(\pi + 1)$

## 3.10* ÖZDEĞER PROBLEMİ

Matematiğin çeşitli alanlarında, aynı zamanda Fizik ve Teknik uygulamalarında (özellikle, maddesel sistemlerin salınım hareketinin – telin enine salınım hareketinin, esnek çubuğun boyuna salınım hareketinin, borularda ses dalgalarının, elektrik tellerinin salınım hareketinin incelenmesinde vb.),

$$\left(p(x)y'\right)' + \left[q(x) + \lambda r(x)\right] = 0, \quad (a < x < b) \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

biçiminde sınır değer problemlerine sıkça rastlanmaktadır. Burada $p(x)$, $q(x)$ ve $r(x)$, $[a, b]$ aralığında $(a < b)$ gereken özelliklere sahip belli gerçel fonksiyonlar, $\lambda$ gerçel parametre, $a_1, a_2$ $(a_1^2 + a_2^2 \neq 0)$, $b_1$, $b_2$ $(b_1^2 + b_2^2 \neq 0)$ belli gerçel sayılar, $y(x)$ ise aranan fonksiyondur ( $y(x) \equiv 0$ fonksiyonunun, (1), (2) problemini sağladığı açıktır).

(1), (2) problemine sıfırdan farklı çözüm sağlayan $\lambda$ sayılarına sözü edilen problemin *özdeğerleri*, bunlara uygun çözümlere ise *özfonksiyonları* denir. Bu durumda, (1), (2) problemine *özdeğer* veya *Sturm-Liouville*[1] problemi de denir.

(1), (2) problemiyle ilgili genel açıklamayı vermeden önce, aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

---

**ÖRNEK 1** $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(l) = 0$ probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının varlığını inceleyin, varsa, bularak özelliklerini belirleyin ( $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $r(x) = 1$, $a = 0$, $b = l$, $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2 = 0$ )[2].

○ Ele alınan denklemin çözümünü,

$$y = e^{kx} \quad (k = ?)$$

şeklinde arayıp karakteristik denklemini

$$k^2 + \lambda = 0$$

olarak buluruz (bkz. Bölüm 3.3). Açıktır ki burada, $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere üç durum olasıdır. Bu durumları tek tek inceleyelim.

$(a)$ $\lambda < 0$ $(-\lambda > 0)$ *Durumu.* Bu durumda,

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} \quad \text{(gerçel kökler)}$$

olduğundan, ele alınan denklemin özel ve genel çözümleri sırasıyla,

$$y_1(x) = e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \qquad y_2(x) = e^{\sqrt{-\lambda}x}, \qquad y(x) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$$

olarak yazılabilir. Burada sınır koşullarını göz önüne alırsak, $C_1$ ve $C_2$ sabitleri için

---

[1] Jacues Charles François Sturm (1803-1855)- Fransız matematikçi.

[2] Ele alınan probleme, kısmi türevli denklemler için sınır değer problemlerinde ve karışık problemlerin çözümünde sıkça rastlanmaktadır.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases}$$

sistemini, sonuçta ise $C_1 = C_2 = 0$ değerlerini buluruz. Demek ki, $\lambda < 0$ durumunda, ele alınan problemin yalnız $y(x) \equiv 0$ (açık) çözümü vardır, yani özdeğerleri yoktur;

(*b*) $\lambda = 0$ *Durumu.* Bu durumda,

$$y'' = 0 \Rightarrow y(x) = C_1 x + C_2$$

olur ve sınır koşulları göz önüne alındığında yine $C_1 = C_2 = 0$ olarak bulunur. Demek ki, $\lambda = 0$ durumunda da özdeğerler yoktur;

(*c*) $\lambda > 0$ $(-\lambda < 0)$ *Durumu.* Bu durumda,

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda} \quad \text{(sanal kökler)}$$

olduğundan, ele alınan denklemin özel ve genel çözümleri sırasıyla,

$$y_1(x) = \cos\sqrt{\lambda}x, \qquad y_2(x) = \sin\sqrt{\lambda}x, \qquad y(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

olarak yazılabilir. Burada sınır koşullarını göz önüne alırsak, $C_1$ ve $C_2$ sabitleri için

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \\ C_1\cos\sqrt{\lambda}l + C_2\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \end{cases}$$

olur. Buradan da $C_1 = 0$ ve $C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$ elde edilir. Son eşitlikte $C_2 = 0$ olamaz (aksi takdirde, yine de $y(x) \equiv 0$ açık çözümü elde edilir). Bu yüzden,

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0$$

olması gerekir ($C_2 \neq 0$). Son eşitlikten,

$$\sqrt{\lambda}l = n\pi \quad (n \in N) \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n = \overline{1,\infty})$$

olarak bulunur. Demek ki, $\lambda > 0$ durumunda, ele alınan problemin $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ $(n = \overline{1,\infty})$ olmak üzere sonsuz sayıda özdeğeri vardır. Bu özdeğerlere karşılık özfonksiyonları $\varphi_n(x)$ ile gösterirsek,

$$\varphi_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x \quad (n = \overline{1,\infty})$$

olacağı açıktır ($C_2 = 1$ kabul ettik. Ele alınan problem türdeş olduğundan, bunun önemi yoktur).

Böylece, $\lambda > 0$ durumunda, ele alınan sınır değer probleminin,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x \quad (n = \overline{1,\infty}) \tag{3}$$

olmak üzere sonsuz sayıda özdeğeri ve onlara karşılık sonsuz sayıda özfonksiyonları vardır (her $(n\pi / l)^2$ özdeğerine bir tane $\sin\frac{n\pi}{l}x$ özfonksiyonu karşı gelmektedir).

Bulunan özdeğerlerin ve özfonksiyonların aşağıdaki özelliklere sahip oldukları açıktır.

**1.** $$0 < \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 < \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 < \left(\frac{3\pi}{l}\right)^2 < \ldots < \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 < \ldots \text{ yani}$$

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 = \infty \quad \text{yani} \quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$$

yazılışları doğrudur.

**2.** Farklı özdeğerlere farklı özfonksiyonlar karşılık gelir, yani, $\lambda_n \neq \lambda_k$ için $\varphi_n(x) \neq \varphi_k(x)$ olur $(n, k = \overline{1,\infty}, n \neq k)$.

**3.** $\sin\frac{\pi}{l}x, \sin\frac{2\pi}{l}x, \ldots, \sin\frac{n\pi}{l}x, \ldots$ özfonksiyonlar sistemi, $[0,l]$ aralığında *ortogonal sistem* oluşturur, yani,

$$(\varphi_n, \varphi_k) = \left(\sin\frac{n\pi}{l}x, \sin\frac{k\pi}{l}x\right) = \int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}x \sin\frac{k\pi}{l}x\,dx = \begin{cases} 0, & \text{eğer } n \neq k \\ \frac{l}{2}, & \text{eğer } n = k \end{cases}$$

$$(n, k = \overline{1,\infty})$$

eşitliği doğrudur.

**4.** $\sin\frac{n\pi}{l}x$ fonksiyonunun, $(0,l)$ açık aralığında $x_{k-1} = \frac{(k-1)l}{n}$ $(k = \overline{2,n})$ olmak üzere $n-1$ sayıda sıfırı (yani sıfıra dönüştüğü noktalar) vardır. Başka bir deyişle, $(0, l)$ açık aralığında, $\sin\frac{\pi}{l}x$'in sıfırı yoktur (sıfır tane), $\sin\frac{2\pi}{l}x$'in $x_1 = \frac{l}{2}$ olmak üzere bir tane, $\sin\frac{3\pi}{l}x$'in $x_1 = \frac{l}{3}$ ve $x_2 = \frac{2l}{3}$ olmak üzere iki tane vb. sıfırı vardır.

Görüldüğü gibi, $l$'ye bağlı olarak, aynı bir denklem için özdeğer ve özfonksiyonlar değişir. Örneğin,

$$l = 1 \text{ için}, \qquad \lambda_n = (n\pi)^2, \qquad \varphi_n(x) = \sin n\pi x$$

$$l = \frac{\pi}{2} \text{ için}, \qquad \lambda_n = (2n)^2, \qquad \varphi_n(x) = \sin 2nx$$

$$l = \pi \text{ için}, \qquad \lambda_n = n^2, \qquad \varphi_n(x) = \sin nx$$

olur $(n = \overline{1, \infty})$ vb. ○

---

**ÖRNEK 2** $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$ (yani, $(xy')' + \frac{\lambda}{x}y = 0$), $y'(1) = y'(e^{2l}) = 0$ probleminin $(x > 0)$ özdeğer ve özfonksiyonlarının varlığını inceleyin, varsa bularak özelliklerini belirleyin ( $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $r(x) = 1/x$).

○ Ele alınan denklemin Euler denklemi olduğunu göz önüne alıp bunun çözümünü,

$$y = x^k \quad (k = ?)$$

şeklinde arayalım (bkz. Bölüm 3.7). Buradan,

$$y' = kx^{k-1}, \; y'' = k(k-1)x^{k-2}$$

buluruz; $y$, $y'$ ve $y''$'nün ifadelerini denklemde yazarsak, karakteristik denklemi,

$$k^2 + \lambda = 0$$

olarak buluruz.

Yine de $\lambda$ parametresi için olası $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ve $\lambda > 0$ durumlarını tek tek ele alalım.

$(a)$ $\lambda < 0$ $(-\lambda > 0)$ *Durumu.* Bu durumda,

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} \quad \text{(gerçel kökler)}$$

olduğundan, ele alınan denklemin özel ve genel çözümleri sırasıyla,

$$y_1(x) = x^{-\sqrt{-\lambda}}, \qquad y_2(x) = x^{\sqrt{-\lambda}}, \qquad y(x) = C_1x^{-\sqrt{-\lambda}} + C_2x^{\sqrt{-\lambda}}$$

olarak bulunur. Buradan,

$$y'(x) = -C_1\sqrt{-\lambda}x^{-\sqrt{-\lambda}-1} + C_2\sqrt{-\lambda}x^{\sqrt{-\lambda}-1}$$

buluruz, sınır koşullarını göz önüne alırsak, $C_1$ ve $C_2$ sabitleri için,

$$\begin{cases} -\sqrt{-\lambda}C_1 + \sqrt{-\lambda}C_2 = 0 \\ -\sqrt{-\lambda}C_1 e^{-2l(\sqrt{-\lambda}+1)} + \sqrt{-\lambda}C_2 e^{2l(\sqrt{-\lambda}-1)} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 - C_2 = 0 \\ C_1 e^{-2l(\sqrt{-\lambda}+1)} - C_2 e^{2l(\sqrt{-\lambda}-1)} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1(e^{-2l(\sqrt{-\lambda}+1)} - e^{2l(\sqrt{-\lambda}-1)}) = 0$$

yani $C_1 = C_2 = 0$ değerlerini buluruz (açık çözüm). Demek ki, $\lambda < 0$ durumunda ele alınan problemin özdeğerleri yoktur;

(*b*) $\lambda = 0$ *Durumu.* Bu durumda,

$$(xy')' = 0 \Rightarrow xy' = C_1 \Rightarrow y(x) = C_1 \ln x + C_2$$

olur ve birinci sınır koşuluna göre $C_1 = 0$ olarak bulunur ($y' = C_1 / x$ olduğundan). Bu yüzden, ele alınan problemin çözümü $y(x) = C_2$ olarak yazılabilir ($C_2 \neq 0$). Demek ki $\lambda = 0$ sayısı özdeğerdir ve buna karşılık gelen özfonksiyon da $y(x) = 1$ olarak kabul edilebilir;

(*c*) $\lambda > 0$ $(-\lambda < 0)$ *Durumu.* Bu durumda, karakteristik denkleminin kökleri,

$$k_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda} \quad \text{(sanal kökler)}$$

olduğundan, ele alınan denklemin özel ve genel çözümleri sırasıyla,

$$y_1(x) = \cos(\sqrt{\lambda} \ln x),$$

$$y_2(x) = \sin(\sqrt{\lambda} \ln x),$$

$$y(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} \ln x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} \ln x)$$

olarak yazılabilir. Buradan bulunan,

$$y'(x) = -C_1 \frac{\sqrt{\lambda}}{x} \sin(\sqrt{\lambda} \ln x) + C_2 \frac{\sqrt{\lambda}}{x} \cos(\sqrt{\lambda} \ln x)$$

ifadesini sınır koşullarında göz önüne alırsak, $C_1$ ve $C_2$ sabitleri için

$$\begin{cases} -C_1\sqrt{\lambda} \cdot 0 + C_2\sqrt{\lambda} \cdot 1 = 0 \\ -C_1 \dfrac{\sqrt{\lambda}}{e^{2l}} \sin(\sqrt{\lambda}2l) + C_2 \dfrac{\sqrt{\lambda}}{e^{2l}} \cos(\sqrt{\lambda}2l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 \sin(\sqrt{\lambda}2l) = 0 \end{cases}$$

olur. Burada $C_1 = 0$ olamaz (aksi takdirde yine de $y(x) \equiv 0$ açık çözümü elde edilir). Bu yüzden,

$$\sin(\sqrt{\lambda}\,2l) = 0$$

olması gerekir. Son eşitlikten,

$$\sqrt{\lambda}\,2l = n\pi \quad (n \in N) \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2l}\right)^2 \quad (n = \overline{1,\infty})$$

olarak bulunur. Demek ki, $\lambda > 0$ durumunda ele alınan problemin $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2l}\right)^2$ $(n = \overline{1,\infty})$ olmak üzere sonsuz sayıda özdeğeri vardır. Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonları $\varphi_n(x)$ ile gösterirsek,

$$\varphi_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{2l}\ln x\right) \quad (n = \overline{1,\infty})$$

olacağı açıktır ($C_1 = 1$ kabul ettik).

Böylece, yalnız $\lambda = 0$ ve $\lambda > 0$ durumlarında ele alınan problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları vardır. Bunları sırasıyla aşağıdaki şekilde gösterelim:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2, \quad \lambda_3 = \left(\frac{2\pi}{2l}\right)^2, \ldots, \qquad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2l}\right)^2, \ldots,$$

$$\varphi_1(x) = 1, \qquad \varphi_2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2l}\ln x\right), \qquad \varphi_3(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{2l}\ln x\right), \ldots,$$

$$\varphi_n(x) = \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2l}\ln x\right), \ldots$$

Bu şekilde bulunan özdeğerlerin ve özfonksiyonların aşağıdaki özelliklere sahip oldukları açıktır.

**1.** $$0 < \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 < \left(\frac{2\pi}{2l}\right)^2 < \ldots < \left(\frac{(n-1)\pi}{2l}\right)^2 < \ldots \text{ yani}$$

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n-1)\pi}{2l}\right)^2 = \infty \text{ yani } \lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$$

yazılışları doğrudur.

2. Farklı özdeğerlere, farklı özfonksiyonlar karşılık gelir, yani $\lambda_n \neq \lambda_k$ için $\varphi_n(x) \neq \varphi_k(x)$ olur $n, k = \overline{1,\infty}, n \neq k)$.

3. $1, \cos\left(\frac{\pi}{2l}\ln x\right), \cos\left(\frac{2\pi}{2l}\ln x\right), \ldots, \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2l}\ln x\right), \ldots$ özfonksiyonlar sistemi $[1, e^{2l}]$ aralığında $\frac{1}{x}$ *ağırlıklı ortogonal sistem* oluşturur, yani,

$$(\varphi_n, \varphi_k) = \int_1^{e^{2l}} \frac{1}{x}\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2l}\ln x\right)\cos\left(\frac{(k-1)\pi}{2l}\ln x\right)dx = \begin{cases} 0, \text{ eğer } & n \neq k \\ \alpha_n, \text{ eğer } & n = k \end{cases}$$

eşitliği doğrudur ($n, k = \overline{1,\infty}$, $\alpha_1 = 2l$, $\alpha_n = l$, $n = \overline{2,\infty}$). Bu örnek için $r(x) = \frac{1}{x}$ olduğuna dikkat edelim.

4. $\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2l}\ln x\right)$ özfonksiyonunun, $(1, e^{2l})$ açık aralığında $x_{k+1} = e^{(1+2k)l/(n-1)}$ $(k = \overline{0, n-2})$ olmak üzere $n-1$ sayıda sıfırı vardır ($\varphi_1(x) = 1$'in, yani birinci özfonksiyonunun $(1, e^{2l})$ aralığında sıfırının olmadığı açıktır).

Görüldüğü gibi, bu örnekte de $l$'ye bağlı olarak özdeğer ve özfoksiyonlar değişir. Örneğin,

$$l = 1 \text{ için}, \qquad \lambda_n = \left[\frac{(n-1)\pi}{2}\right]^2, \qquad \varphi_n(x) = \cos\left[\frac{(n-1)\pi\ln x}{2}\right]$$

$$l = \frac{\pi}{2} \text{ için}, \qquad \lambda_n = (n-1)^2, \qquad \varphi_n(x) = \cos[(n-1)\ln x]$$

$$l = \pi \text{ için}, \qquad \lambda_n = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2, \qquad \varphi_n(x) = \cos\left[\frac{(n-1)\ln x}{2}\right]$$

olur $(n = \overline{1,\infty})$ vb.

$x < 0$ olduğunda, incelenen örnekte, $\ln x$ yerine $\ln|x|$ yazmak gerekir. ○

---

İncelenen örneklerden yola çıkarak, doğruluğu sınır değer problemlerine ait daha geniş kapsamlı kitaplarda ispatlanmış olan aşağıdaki teoremi kabul edelim.

**TEOREM** $p(x) \in C^1[a,b]$, $r(x) \in C[a,b]$ pozitif, $q(x) \in C[a,b]$ gerçel fonksiyonlar ve $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$ ise, o zaman $[a,b]$ aralığında (1), (2) probleminin gerçel $\lambda_n$ özdeğerleri ve onlara karşılık gelen $\varphi_n(x)$ özfonksiyonları vardır ve bunlar aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. Özdeğerler negatif değildir ve

$$0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n \to \infty$$

koşullarını sağlar.

2. Farklı özdeğerlere farklı özfonksiyonlar karşılık gelir, yani $\lambda_n \ne \lambda_k$ için $\varphi_n(x) \ne \varphi_k(x)$ olur $(n, k = \overline{1,\infty},\ n \ne k)$;
3. $\varphi_n(x)$ özfonksiyonlar sistemi $(n = \overline{1,\infty})$, $[a, b]$ aralığında $r(x)$ ağırlıklı ortogonal sistem oluşturur, yani,

$$(\varphi_n, \varphi_k) = \int_a^b r(x)\varphi_n(x)\varphi_k(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{eğer } n \ne k \\ \ne 0, & \text{eğer } n = k \end{cases}$$

eşitliği doğrudur;

4. $\varphi_n(x)$ özfonksiyonunun, $[a, b]$ aralığında $n-1$ sayıda sıfırı vardır.

**Uyarı** (1) denklemi için sınır koşulları,

$$\begin{cases} a_1 y(a) + b_1 y(b) = 0 \\ a_2 y'(a) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

şeklinde veya daha değişik şekillerde de verilebilir $(a_1^2 + b_1^2 \ne 0,\ a_2^2 + b_2^2 \ne 0)$. Böyle durumlarda, özdeğer ve özfonksiyonların bulunması (varsa), Örnek 1 ve 2'dekine benzer olarak yapılabilir.

---

**ÖRNEK 3** $y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = y(l),\ y'(0) = y'(l)$ probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının varlığını inceleyin, varsa bulun ($p(x) = 1,\ q(x) = 0,\ r(x) = 1,\ a = 0,\ b = l,\ a_1 = -b_1,\ a_2 = -b_2$). $a_1 = a_2 = 1,\ b_1 = b_2 = -1$).

○ Ele alınan problemin $\lambda < 0$ durumunda özdeğerlerinin olmadığı yukarıda incelenen örneklerdeki gibi gösterilebilir.

Şimdi, $\lambda = 0$ ve $\lambda > 0$ durumlarını tek tek inceleyelim.

$(a)$ $\lambda = 0$ *Durumu.* Bu durumda,

$$y'' = 0, \Rightarrow y' = C_1 \Rightarrow y(x) = C_1 x + C_2$$

olur. Sınır koşullarını göz önüne alırsak,

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 + C_2 = C_1 \cdot l + C_2 \\ C_1 = C_1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0, \qquad C_2 = C \ (C \text{ keyfi değerler alabilir})$$

olur. Demek ki, $\lambda_0 = 0$ ele alınan problemin özdeğeridir, $\varphi_0(x) = 1$ ise ($C = 1$ kabul ettik) uygun özfonksiyondur;

(*b*) $\lambda > 0$ *Durumu.* Bu durumda, ele alınan denklemin genel çözümü,

$$y(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

olduğundan, sınır koşullarını kullanırsak, $C_1$ ve $C_2$ sabitlerini belirlemek için ($y'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$),

$$\begin{cases} C_1(1-\cos\sqrt{\lambda}l) - C_2\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \\ C_1\sin\sqrt{\lambda}l + C_2(1-\cos\sqrt{\lambda}l) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1(1-\cos\sqrt{\lambda}l) - C_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \\ C_1\sin\sqrt{\lambda}l + C_2(1-\cos\sqrt{\lambda}l) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

doğrusal türdeş cebirsel denklem sistemini elde ederiz. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümünün olması için,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\cos\sqrt{\lambda}l & -\sin\sqrt{\lambda}l \\ \sin\sqrt{\lambda}l & 1-\cos\sqrt{\lambda}l \end{vmatrix} = 0$$

olması gerekir (bkz. Bölüm 1.5). Buradan,

$$\cos\sqrt{\lambda}l = 1 \quad \text{yani} \quad \sqrt{\lambda}l = 2\pi n$$

ve sonuçta

$$\lambda_n = \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2 \qquad (n = \overline{1,\infty})$$

özdeğerleri bulunur. Bu özdeğerler için, (*) sisteminin sonsuz sayıda çözümünün varlığı açıktır. $C_1$ ve $C_2$ keyfi olmak üzere, $(C_1, C_2)$ çiftinin sözü edilen sistemi sağladığı kolaylıkla denenebilir. Böylece, her $\lambda_n$ özdeğerine, (1), (4) probleminin,

$$\varphi_n(x) = C_{1n}\cos\frac{2\pi n}{l}x + C_{2n}\sin\frac{2\pi n}{l}x$$

olmak üzere sonsuz sayıda özfonksiyonları karşılık gelir ve bunlar,

$$\varphi_n^{(1)}(x) = \cos\frac{2\pi n}{l}x \quad \text{ve} \quad \varphi_n^{(2)}(x) = \sin\frac{2\pi n}{l}x \quad (n = \overline{1,\infty})$$

özfonksiyonlarının doğrusal bağıntısıdır (bkz. Bölüm 3.2).

Demek ki, ele alınan problem için her özdeğere ($\lambda_0 = 0$ hariç), $\varphi_n^{(1)}(x)$ ve $\varphi_n^{(2)}(x)$ iki özfonksiyon karşı gelmektedir (yani (4) biçimindeki sınır koşulları için genelde yukarıdaki teorem geçersizdir).

Böylece, $[0,l]$ aralığında (1), (4) probleminin özdeğerleri

$$\lambda_n = \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2 \qquad (n = \overline{1,\infty}),$$

bunlara uygun özfonksiyonları ise,

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_n^{(1)}(x) = \cos\frac{2\pi n}{l}x, \quad \varphi_n^{(2)}(x) = \sin\frac{2\pi n}{l}x \quad (n = \overline{1,\infty})$$

biçimindedir diye özetleyebiliriz.

Burada da, $l = 1, \frac{\pi}{2}, \pi$ değerleri için ele alınan problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$l = 1$ için,

$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_n = (2n\pi)^2, \quad \varphi_0(x) = 1, \varphi_n^{(1)}(x) = \cos 2n\pi x, \quad \varphi_n^{(2)}(x) = \sin 2n\pi x,$

$l = \frac{\pi}{2}$ için,

$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_n = (4n)^2, \quad \varphi_0(x) = 1, \varphi_n^{(1)}(x) = \cos 4nx, \quad \varphi_n^{(2)}(x) = \sin 4nx,$

$l = \pi$ için,

$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_n = (2n)^2, \quad \varphi_0(x) = 1, \varphi_n^{(1)}(x) = \cos 2nx, \quad \varphi_n^{(2)}(x) = \sin 2nx$

$(n = \overline{1,\infty})$. ○

**ALIŞTIRMALAR (Bölüm 3.10 için)**

1. Aşağıdaki sınır değer problemlerinin özdeğer ve özfonksiyonlarını bulup $l = 1, \frac{\pi}{2}, \pi$ somut değerleri için yazın.

(a) $y'' + \lambda y = 0,\ y'(0) = y(l) = 0$

(b) $y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = y'(l) = 0$

(c) $y'' + \lambda y = 0,\ y'(0) = y'(l) = 0$

(d) $y'' + 2y' + (\lambda + 1)y = 0,\ y(0) = y(l) = 0$

(e) $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0,\ y(1) = y'(e^{2l}) = 0$

(f) $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0,\ y'(1) = y(e^{2l}) = 0$

(g) $x^2y'' - xy' + (\lambda + 1)y = 0,\ y(1) = y(e^{2l}) = 0$

## 3.11* DOĞRUSAL DİFERANSİYEL DENKLEMLER SİSTEMİNİN KARARLILIĞI

Bilindiği gibi, belli koşullarda gerek diferansiyel denklemler, gerekse de diferansiyel denklemler sistemi için Cauchy probleminin tek çözümü vardır ve bu çözüm, kesin veya yaklaşık yöntemlerden birinin yardımıyla bulunabilir. Ancak, genelde belli bir denklem veya denklemler sistemi için başlangıç koşulları değiştirildiğinde problemi yeniden çözmek gerekir. Üstelik, söz konusu özel çözümler bağımsız değişkenin belli bir aralıktaki değerleri için geçerlidir, yani değişkenin keyfi değerlerinde (değişken sonsuza da yaklaşabilir) çözümün ne olduğunu söylemek zorluk çıkarır. Ayrıca, Mekaniğin ve Tekniğin çoğu probleminde merak konusu, problemin çözümü değil, çözümün karakteridir. Örneğin, başlangıç verilerinin değişimi çözümü nasıl etkiler, çözümün diferansiyel özellikleri nedir, çözüm devirli midir, asimptotik olarak belli bir fonksiyona yaklaşıyor mu gibi sorular ortaya çıkabilir. Bu tür sorularla Diferansiyel Denklemlerin Nitelik Kuramı ilgilenir. Söz konusu kuramın güncel problemlerinden biri, incelenen problemin çözümü kararlı mıdır, değil midir sorusunu yanıtlamaktır.

Soruyu incelemeden önce, aşağıdaki problemi ele alalım.

---

**ÖRNEK 1** Bağımsız değişkenin tüm değerleri için, başlangıç koşulunun küçük değişiminin,

$$x'(t) = ax(t),\ x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

probleminin çözümünü nasıl etkilediğini inceleyin ($\forall a \in R$).

○ Ele alınan denklemin genel çözümünün,

$$x(t) = Ce^{at}$$

şeklinde olacağı açıktır. Başlangıç koşulunu göz önüne alırsak, $x_0 = Ce^{at_0}$ yani $C = x_0 e^{-at_0}$ olur ve problemin çözümü,

$$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)} \tag{2}$$

olarak bulunur.

Şimdi, (1) probleminde $x_0$ başlangıç koşulunu $\tilde{x}_0$ ile değiştirip elde edilen problemin çözümünü $\tilde{x}(t)$ ile gösterelim. O zaman, yeni problemin çözümünün

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{a(t-t_0)} \tag{3}$$

olacağı açıktır.

Bulunan çözümlerin farkının mutlak değerini,

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| = |\tilde{x}_0 - x_0| e^{a(t-t_0)}$$

şeklinde yazıp $a$ parametresi için aşağıdaki olası durumları tek tek inceleyelim.

(*a*) $a < 0$ *Durumu.* Bu durumda, tüm $t > t_0$ değerlerinde $e^{a(t-t_0)} < 1$ olduğundan, $|\tilde{x} - x_0|$ yeteri kadar küçük olduğunda $|\tilde{x}(t) - x(t)|$ farkı da yeteri kadar küçük olacaktır. Başka bir deyişle, başlangıç verisinin küçük değişimine çözümün de küçük değişimi karşılık gelmektedir. Üstelik, $t \to \infty$ 'da $|\tilde{x}(t) - x(t)| \to 0$ olur ($e^{a(t-t_0)} \to 0$ olduğundan).

(*b*) $a = 0$ *Durumu.* Bu durumda,

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| = |\tilde{x}_0 - x_0|$$

olduğundan, yine $|\tilde{x} - x_0|$ yeteri kadar küçük olduğunda $|\tilde{x}(t) - x(t)|$ farkı da yeteri kadar küçük olacaktır. Ancak, $t \to \infty$ 'da

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| = |\tilde{x}_0 - x_0| \neq 0$$

olduğu açıktır.

(*c*) $a > 0$ *Durumu.* Bu durumda, tüm $t > t_0$ değerlerinde $e^{a(t-t_0)} > 1$ ve $t \to \infty$ 'da $e^{a(t-t_0)} \to \infty$ olduğundan, $|\tilde{x} - x_0|$ yeteri kadar küçük olduğunda $|\tilde{x}(t) - x(t)|$ farkı yalnız küçük $t - t_0$ için yeteri kadar küçük olabilir. Ancak, $t - t_0$ büyüdükçe $|\tilde{x}(t) - x(t)|$ farkı da büyür, yani $\tilde{x}(t)$ çözümü $x(t)$ çözümünden uzaklaşır ve $t \to \infty$ 'da $|\tilde{x}(t) - x(t)| \to \infty$ olur. ○

İncelenen örnekten yola çıkarak, diferansiyel denklemlerin (genelde diferansiyel denklemler sisteminin) çözümünün kararlılığı[1] denen aşağıdaki kavramı verelim. Bunun için önce,

$$x_i'(t) = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \quad (i = \overline{1, n}) \tag{4}$$

diferansiyel denklemler sistemini ele alıp bunun

$$x_i(t_0) = x_{i0} \quad (i = \overline{1, n}) \tag{5}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümünü $x_i(t)$ ile $(i = \overline{1, n})$ gösterelim. Burada $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ $(i, k = \overline{1, n})$ fonksiyonlarının ele alınan bölgede sürekli olduğunu kabul ediyoruz.

**Tanım 1** Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı; (4), (5) probleminin $x_i(t)$ çözümü ve aynı sistemin

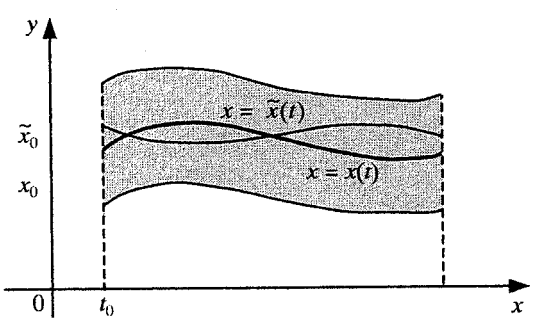
$$|\tilde{x}_i(t_0) - x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \qquad \text{yani} \qquad |\tilde{x}_{i0} - x_{i0}| < \delta(\varepsilon)$$

eşitsizliğini sağlayan $\tilde{x}_{i0}$ başlangıç koşuluna uygun $\tilde{x}_i(t)$ çözümü için, tüm $t > t_0$ değerlerinde

$$|\tilde{x}_i(t) - x_i(t)| < \varepsilon \tag{6}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde varsa, o zaman $x_i(t)$'ye *kararlı çözüm* denir $(i = \overline{1, n})$.

Bu tanımdan görüldüğü gibi, $x_i(t)$ kararlı çözüm ise, o zaman $t_0$ başlangıç anında ona yakın olan $\tilde{x}_i(t)$ çözümü, tüm $t \geq t_0$ için, $x_i(t)$ etrafında yapılan $\varepsilon$ hortumunun içinde bulunur $(i = \overline{1, n})$. Şekil 2*'da $n = 1$ için $\varepsilon$ hortumu (şerit – taralı bölge) çizilmiştir.




**ŞEKİL 2***

[1] Diferansiyel denklemlerin çözümünün kararlılığı ilk kez Rus matematikçi A. M. Lyapunov (Liapunov) (1857-1918) tarafından ele alınmıştır.

Yeteri kadar küçük $\delta > 0$ sayısı için (6) eşitsizliğini sağlamayacak en azından bir tane $\tilde{x}_i(t)$ çözümü $(i = \overline{1,n})$ varsa, o zaman $x_i(t)$ 'ye (4), (5) probleminin *kararsız çözümü* denir.

**Tanım 2** (4), (5) probleminin $x_i(t)$ çözümü kararlı olup, aynı zamanda $|\tilde{x}_i(t_0) - x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon)$ için,

$$\lim_{t\to\infty}|\tilde{x}_i(t) - x_i(t)| = 0$$

eşitliğini sağladığında, $x_i(t)$ 'ye *asimptotik kararlı çözüm* denir.

Tanım 2'den görüldüğü gibi, sadece kararlı çözüm asimptotik kararlı olabilir. Başka bir deyişle, asimptotik kararlı çözüm aynı zamanda kararlıdır.

Bu tanımlara göre, Örnek 1'de incelenen problemin $x(t)$ çözümü:

$a < 0$ durumunda asimptotik kararlıdır;

$a = 0$ durumunda kararlıdır, ancak asimptotik kararlı değildir;

$a > 0$ durumunda kararsızdır.

---

**ÖRNEK 2** Tanıma dayanarak, aşağıdaki problemlerin çözümünün kararlılığını inceleyin.

(a) $\dfrac{dx}{dt} = -2at(x+1),\ x(0) = 2,\ a \in R$

(b) $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 + 1 \end{cases}\quad x_1(0) = x_2(0) = 1$

○ (a) Ele alınan denklemin,

$$\frac{dx}{x+1} = -2atdt \Rightarrow \ln|x+1| - \ln C = -at^2 \Rightarrow x = Ce^{-at^2} - 1$$

genel çözümünü bulup, başlangıç koşuluna göre, $C = 3$ buluruz. Demek ki, aranan çözüm,

$$x(t) = 3e^{-at^2} - 1$$

olur.

Keyfi $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$ başlangıç koşulu için $C = \tilde{x}_0 + 1$ olduğundan, buna uygun çözüm,

$$\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_0 + 1)e^{-at^2} - 1$$

olarak bulunur. Bulunan $x(t)$ ve $\tilde{x}(t)$ çözümleri için

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| = |\tilde{x}_0 - 2|e^{-at^2}$$

olduğu açıktır. Burada, $a$ parametresine bağlı aşağıdaki olası durumları tek tek inceleyelim.

1. $a < 0$ $(-a > 0)$. Bu durumda, $|\tilde{x}_0 - 2|$ yeteri kadar küçük olduğunda da, her $t > 0$ için

$$|\tilde{x}_0 - 2|e^{-at^2} < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanamaz. Yani $x(t) = 3e^{-at^2} - 1$ çözümü kararsızdır;

2. $a = 0$. Bu durumda, $x(t) = 1$, $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0$ olur ve tüm $t > 0$ için

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| = |\tilde{x}_0 - 2| < \varepsilon$$

eşitsizliği yazılabilir $(\delta(\varepsilon) = \varepsilon)$. Yani $x(t) = 3e^{-at^2} - 1$ çözümü kararlıdır, ancak asimptotik kararlı değildir ($\lim\limits_{t\to\infty}|\tilde{x}(t) - x(t)| = |\tilde{x}_0 - 2| \neq 0$ olduğundan);

3. $a > 0$. Bu durumda,

$$\lim_{t\to\infty}|\tilde{x}(t) - x(t)| = |\tilde{x}_0 - 2| \lim_{t\to\infty} e^{-at^2} = 0$$

olduğu açıktır. Yani $x(t) = 3e^{-at^2} - 1$ çözümü asimptotik kararlıdır.

**(b)** Önce, ele alınan sistemi aşağıdaki gibi ikinci mertebeden denkleme dönüştürelim:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1'' = x_2' \\ x_2' = -x_1 + 1 \end{cases} \Rightarrow x_1'' + x_1 = 1$$

Bulunan türdeş olmayan doğrusal denklemin genel çözümünün,

$$x_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 1$$

şeklinde olacağı açıktır. O zaman, sistemin birinci denklemine göre,

$$x_2(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$$

olur. Demek ki, sistemin genel çözümü,

$$x_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 1,\ x_2(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$$

şeklinde yazılabilir.

Başlangıç koşullarını kullanırsak, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ olarak bulunur ve ele alınan problemin çözümü,

$$x_1(t) = \sin t + 1,\ x_2(t) = \cos t \qquad (*)$$

olur.

Şimdi, genel çözümü kullanarak, verilen sistemin keyfi

$$\tilde{x}_1(0) = \tilde{x}_1^0, \qquad \tilde{x}_2(0) = \tilde{x}_2^0$$

başlangıç koşullarını sağlayan $\tilde{x}_1(t)$, $\tilde{x}_2(t)$ çözümünü bulalım. Bunun için önce, sözü edilen koşullara uygun $C_1$ ve $C_2$ sabitlerini belirleyelim:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1^0 = C_1 + 1 \\ \tilde{x}_2^0 = C_2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \tilde{x}_1^0 - 1,\ C_2 = \tilde{x}_2^0$$

Böylece, aranan çözüm,

$$\tilde{x}_1(t) = (\tilde{x}_1^0 - 1)\cos t + \tilde{x}_2^0 \sin t + 1, \qquad x_2(t) = -(\tilde{x}_1^0 - 1)\sin t + \tilde{x}_2^0 \cos t \qquad (**)$$

şeklinde olur.

(*) ve (**) çözümlerinin farkının mutlak değeri için

$$|\tilde{x}_1(t) - x_1(t)| = |(\tilde{x}_1^0 - 1)\cos t + (\tilde{x}_2^0 - 1)\sin t| = \sqrt{(\tilde{x}_1^0 - 1)^2 + (\tilde{x}_2^0 - 1)^2}\,|\sin(t + \varphi_1)|$$

$$|\tilde{x}_2(t) - x_2(t)| = |-(\tilde{x}_1^0 - 1)\sin t + (\tilde{x}_2^0 - 1)\cos t| = \sqrt{(\tilde{x}_1^0 - 1)^2 + (\tilde{x}_2^0 - 1)^2}\,|\sin(t - \varphi_2)|$$

eşitliklerinin doğruluğu açıktır. Burada, $\varphi_1 = \arctan\dfrac{\tilde{x}_1^0 - 1}{\tilde{x}_2^0 - 1}$, $\varphi_2 = \arctan\dfrac{\tilde{x}_2^0 - 1}{\tilde{x}_1^0 - 1}$ olarak kabul edilmiştir (bkz. Bölüm 3.6).

$\forall \varepsilon > 0$ için $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ alırsak, $|\tilde{x}_1^0 - 1| < \delta$, $|\tilde{x}_2^0 - 1| < \delta$ eşitsizlikleri sağlandığında, her $t > 0$ için

$$|\tilde{x}_1(t) - x_1(t)| < \varepsilon \qquad \text{ve} \qquad |\tilde{x}_2(t) - x_2(t)| < \varepsilon$$

eşitsizliklerinin sağlandığı son eşitliklerden görülmektedir. Yani, ele alınan problemin çözümü ( $x_1(t) = \sin t + 1, x_2(t) = \cos t$ ) kararlıdır. Ancak,

$$\lim_{t\to\infty}|\tilde{x}_1(t) - x_1(t)| = \sqrt{(\tilde{x}_1^0 - 1)^2 + (\tilde{x}_2^0 - 1)^2}\,\lim_{t\to\infty}|\sin(t + \varphi_1)|$$

ve

$$\lim_{t\to\infty}|\tilde{x}_2(t) - x_2(t)| = \sqrt{(\tilde{x}_1^0 - 1)^2 + (\tilde{x}_2^0 - 1)^2}\,\lim_{t\to\infty}|\sin(t - \varphi_2)|$$

limitlerinin yokluğundan dolayı, sözü edilen çözüm asimptotik kararlı değildir. ○

**Uyarı** (4) sisteminin $x_i(t)$ çözümünün kararlılık problemi, yerine koyma yönteminin yardımıyla ondan elde edilen başka bir sistemin açık (sıfır) çözümünün kararlılık problemine dönüştürülebilir. Şimdi bunu gösterelim. Önce,

$$\bar{x}_i(t) = \tilde{x}_i(t) - x_i(t) \quad (i = \overline{1,n})$$

yerine koymasını kullanıp (4) sisteminden, yeni $\bar{x}_i(t)$ bilinmeyenli

$$\bar{x}_i'(t) + x_i'(t) = f[t, \bar{x}_1(t) + x_1(t), \bar{x}_2(t) + x_2(t), ..., \bar{x}_n(t) + x_n(t)]$$

sistemine geçelim. Burada,

$$x_i'(t) = f[t, x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)]$$

olduğunu göz önüne alırsak,

$$\bar{x}_i'(t) = f[t, \bar{x}_1(t) + x_1(t), \bar{x}_2(t) + x_2(t), ..., \bar{x}_n(t) + x_n(t)] - f[t, x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)]$$

sistemini elde ederiz $(i = \overline{1,n})$. $\bar{x}_i(t) \equiv 0$ 'ın bu sistemin açık çözümü olduğu kuşkusuzdur (açık çözüme sistemin *durgun noktası* da denir).

Bu uyarının sonucu olarak ileride

$$x_i'(t) = \varphi_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (i = \overline{1,n}) \tag{7}$$

sisteminin $x_i(t) \equiv 0$ açık çözümünün kararlılığını inceleyeceğiz (Basitlik için bilinmeyen fonksiyonları yine $x_i(t)$ ile gösterdik).

Tanım 1 ve 2'ye göre, (7) sistemin açık çözümünün kararlılığı ve asimptotik karalılığı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

(7) sisteminin açık çözümü, yalnız her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı,

$$|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon)$$

eşitsizliğini sağlayan tüm $x_i(t_0)$ ve $t \geq t_0$ değerleri için

$$|x_i(t)| < \varepsilon$$

olacak şekilde varsa, kararlıdır. Üstelik,

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = 0$$

olduğunda, açık çözüm asimptotik kararlıdır.

Şimdi, $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ bilinmeyenleri için sabit katsayılı,

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \tag{8}$$

doğrusal türdeş diferansiyel denklemler sisteminin $x_1(t) = x_2(t) = 0$ açık çözümünün kararlılığını katsayılara bağlı olarak inceleyelim. Bunun için önce, ele alınan sistemi,

$$x_1'' - (a_{11} + a_{22})x_1' + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = 0 \tag{9}$$

şeklinde ikinci mertebeden bir diferansiyel denkleme dönüştürelim. (8) sistemiyle (9) denklemi özdeş olduğundan, bunların açık çözümleri aynı zamanda kararlı veya kararsız olabilir. (9) denkleminin,

$$k^2 - (a_{11} + a_{22})k + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \quad \text{veya} \quad \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

karakteristik denkleminin $k_1$ ve $k_2$ köklerinin türüne bağlı olarak aşağıdaki durumları tek tek inceleyelim.

**(a) Karakteristik denklemin köklerinin gerçel ve farklı olması durumu** $(k_1 \neq k_2)$. Bu durumda, (9) denkleminin genel çözümü,

$$x_1(t) = C_1e^{k_1t} + C_2e^{k_2t} \tag{11}$$

şeklinde yazılabilir. (11) eşitliğinden görüldüğü gibi,

1. $k_1 < k_2 < 0$ durumunda,

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 0$$

eşitliği doğrudur. Yani açık çözüm asimptotik kararlıdır;

2. $k_1 < k_2 = 0$ durumunda,

$$x_1(t) = C_1e^{k_1t} + C_2 \quad \text{ve} \quad \lim_{t\to\infty} x_1(t) = C_2$$

olduğundan, açık çözüm kararlıdır, ancak asimptotik kararlı değildir;

3. $k_1 < 0 < k_2$, $k_1 = 0 < k_2$ ve $0 < k_1 < k_2$ durumlarında, (11) eşitliğindeki $C_2e^{k_2t}$ terimi her $t > 0$ için yeteri kadar büyük değerler alabildiğinden, açık çözüm kararsızdır.

**(b) Karakteristik denklemin köklerinin eşit olması durumu** $(k_1 = k_2)$. Bu durumda (9) denkleminin genel çözümü,

$$x_1(t) = (C_1t + C_2)e^{k_1t} \tag{12}$$

şeklinde yazılabilir. (12) eşitliğinden görüldüğü gibi,

1. $k_1 = k_2 < 0$ durumunda,

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \lim_{t\to\infty}(C_1t + C_2)e^{k_1t} = 0$$

eşitliği doğrudur. Yani açık çözüm asimptotik kararlıdır;

2. $k_1 = k_2 = 0$ durumunda,

$$x_1(t) = C_1 t + C_2$$

olduğundan, açık çözüm kararsızdır;

3. $k_1 = k_2 > 0$ durumunda da sıfır çözümün kararsızlığı açıktır.

**(c) Karakteristik denklemin köklerinin karmaşık olması durumu** ($k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$). Bu durumda, (9) denkleminin genel çözümü,

$$x_1(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) \tag{13}$$

şeklinde yazılabilir. (13) eşitliğinden görüldüğü gibi,

1. $\alpha < 0$ için

$$\lim_{t \to \infty} x_1(t) = 0$$

eşitliği doğrudur. Yani açık çözüm asimptotik kararlıdır;

2. $\alpha = 0$ için

$$x_1(t) = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t \text{ veya } x_1(t) = A \sin(\beta t + \varphi_0)$$

olduğundan, açık çözüm kararlıdır, ancak asimptotik kararlı değildir;

3. $\alpha > 0$ için $\lim\limits_{t \to \infty} x_1(t)$ limiti olmadığından, açık çözüm kararsızdır.

Elde edilen sonuçlara dayanılarak, $n$ sayıda denklemin oluşturduğu,

$$x_i'(t) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \quad (i = \overline{1,n}) \tag{14}$$

sabit katsayılı doğrusal türdeş denklemler sisteminin açık çözümünün ($x_i(t) \equiv 0,\ i = \overline{1,n}$) kararlılık koşulları biçimsel olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

*(14) sisteminin açık çözümü,*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \tag{15}$$

*karakteristik denkleminin:*

*(1) tüm köklerinin (basit veya tekrarlı) gerçel kısımları negatif olduğunda asimptotik kararlıdır (gerçel kökler de karmaşık sayı olarak düşünülür);*

*(2) köklerinden en az birinin gerçel kısmı sıfırdan büyük olduğunda kararsızdır;*

*(3) tüm kökleri basit, aynı zamanda gerçel kısmı sıfır veya bir bölümünün gerçel kısmı sıfırdan küçük, bir bölümünün ise gerçel kısmı sıfır olduğunda kararlıdır, ancak asimptotik kararlı değildir;*

*(4) yukarıdaki seçeneklerin kapsamadığı tüm durumlarda kararsızdır.*

---

**ÖRNEK 3** Aşağıdaki sistemlerin açık çözümünün kararlılığını inceleyin.

(a) $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = 9x_1 - 4x_2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_2' = 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ x_3' = -x_1 - 2x_3 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x_1' = -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ x_2' = 6x_1 - x_2 - 6x_3 \\ x_3' = -8x_1 + 3x_2 + 9x_3 \end{cases}$

○ **(a)** Önce, ele alınan sistemin karakteristik denklemini yazıp ($a_{11} = 4$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 2$) köklerini bulalım:

$$\begin{vmatrix} 4-k & -1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 - 6k + 9 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 3$$

Karakteristik denklemin kökleri (köklerin gerçel kısmı da denebilir) pozitif olduğundan, ele alınan sistemin açık çözümü kararsızdır;

**(b)** Benzer yolla,

$$\begin{vmatrix} 2-k & -1 \\ 9 & -4-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 + 2k + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = -1$$

bulunur. Kökler (köklerin gerçel kısmı da denebilir) negatif olduğundan, açık çözümü asimptotik kararlıdır;

**(c)** Yine, karakteristik denklem ve kökleri,

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm i$$

olarak bulunur. Kökler basit ve gerçel kısmı sıfır olduğundan, sistemin açık çözümü kararlıdır, ancak asimptotik kararlı değildir;

**(d)** Aynı şekilde, karakteristik denklem ve kökleri,

$$\begin{vmatrix} 2-k & -1 & 2 \\ 5 & -3-k & 3 \\ -1 & 0 & -2-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2,3} = -1$$

olarak bulunur. Tüm kökler (yani köklerin gerçel kısmı) negatif olduğundan, sistemin açık çözümü asimptotik kararlıdır;

**(e)** Benzer yolla karakteristik denklem ve kökleri,

$$\begin{vmatrix} -4-k & 2 & 5 \\ 6 & -1-k & -6 \\ -8 & 3 & 9-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^3 - 4k^2 + 5k - 2 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 1, k_3 = 2$$

olarak bulunur. Karakteristik denklemin tüm kökleri (yani köklerin gerçel kısmı) pozitif olduğundan, sistemin açık çözümü kararsızdır. ○

---

**ÖRNEK 4** Gerçel $a$ parametresinin hangi değerlerinde

**(a)** $\begin{cases} x_1' = a^2 x_1 - 3x_2 \\ x_2' = ax_1 + 4x_2 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2 \\ x_2' = ax_1 - a^2 x_2 \end{cases}$

sisteminin açık çözümü kararlıdır?

○ **(a)** Ele alınan sistemin karakteristik denklemini,

$$\begin{vmatrix} a^2 - k & -3 \\ a & 4-k \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{yani} \qquad k^2 - (a^2+4)k + a(4a+3) = 0$$

biçiminde yazarsak, köklerin çarpımının ve toplamının

$$k_1 k_2 = a(4a+3), \qquad k_1 + k_2 = a^2 + 4$$

şeklinde olduğunu görürüz. Köklerin en azından birinin (veya gerçel kısmının) pozitif olduğu ikinci eşitlikten görülmektedir. Demek ki, $a$ parametresinin tüm değerlerinde sistemin açık çözümü kararsızdır;

**(b)** Yine,

$$\begin{vmatrix} -1-k & 1 \\ a & -a^2-k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{yani} \quad k^2 + (a^2+1)k + a(a-1) = 0$$

yazarsak, kökler için

$$k_1 k_2 = a(a-1), \; k_1 + k_2 = -(a^2+1)$$

olduğunu görürüz. $k_1$ ve $k_2$ 'nin (veya gerçel kısımlarının) aynı zamanda pozitif olmadığı ikinci eşitlikten görülmektedir. Demek ki, $a$ parametresine bağlı olarak, $k_1 k_2 < 0$, $k_1 k_2 = 0$ ve $k_1 k_2 = 0$ durumlarını tek tek incelemek gerekir.

**1.** $k_1 k_2 < 0 \Rightarrow a(a-1) < 0 \Rightarrow a \in (0,1)$

Demek ki, $a \in (0, 1)$için köklerden biri pozitiftir, yani açık çözüm kararsızdır;

2. $k_1 k_2 = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow a = 0$ veya $a = 1$.
Demek ki, $a = 0$ ve $a = 1$ için kökün biri sıfır, diğeri ise negatiftir. Yani açık çözüm kararlıdır, ancak asimptotik kararlı değildir;

3. $k_1 < k_2 < 0 \Rightarrow a(a-1) > 0 \Rightarrow a < 0$ veya $a > 1$.
Demek ki, $a \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ için açık çözüm asimptotik kararlıdır. ○

---

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 3.11 için)

1. Tanıma dayanarak, aşağıdaki problemlerin çözümünün kararlılığını inceleyin.

(a) $x' = 1 - x,\ x(0) = 1$ (b) $x' = 4xt,\ x(0) = 0$

(c) $x' = 4x + 2t,\ x(0) = 0.875$ (d) $x' = \sin t,\ x(0) = 1$

(e) $x' = \cos t + 1,\ x(0) = 2$ (f) $x' = x \sin t,\ x(0) = 1$

2. Aşağıdaki sistemlerin açık çözümünün kararlılığını inceleyin.

(a) $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = -8x_1 - 5x_2 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1' = -x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -2x_1 + 3x_2 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2 \\ x_2' = -x_1 - 4x_2 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x_1' = x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ x_2' = 4x_1 - 7x_2 + 8x_3 \\ x_3' = 6x_1 - 7x_2 + 7x_3 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2 \\ x_2' = -2x_2 \\ x_3' = -3x_3 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x_1' = 5x_1 - x_2 - 4x_3 \\ x_2' = -12x_1 + 5x_2 + 12x_3 \\ x_3' = 10x_1 - 3x_2 - 9x_3 \end{cases}$

3. Gerçel $a$ parametresine bağlı olarak, aşağıdaki sistemlerin açık çözümünün kararlılığını inceleyin.

(a) $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = 5ax_1 - a^2 x_2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1' = ax_1 + x_2 \\ x_2' = -x_1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x_1' = ax_1 - x_2 \\ x_2' = ax_2 - x_3 \\ x_3' = -x_1 + ax_3 \end{cases}$

## BÖLÜM 3 İÇİN ÇEŞİTLİ ALIŞTIRMALAR

**1.** Aşağıdaki denklemleri çözün.

**(a)** $y''' \sin^4 x = \sin 2x$ **(b)** $y^{(4)} = \sin^2 x$

**(c)** $y^{(10)} = e^{ax}$ **(d)** $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$

**(e)** $(1 + x^2)y'' + 1 + (y')^2 = 0$ **(f)** $yy'' = (y')^2$

**(g)** $x^2y'' + xy' = 1$ **(h)** $yy'' - y'(1 + y') = 0$

**(i)** $y'' = -\dfrac{x}{y'}$ **(j)** $y' + \dfrac{1}{4}(y'')^2 = xy''$

**(k)** $xy''' + y'' = 1 + x$ **(l)** $(y''')^2 + (y'')^2 = 1$

**2.** Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün.

**(a)** $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 3$

**(b)** $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'},\ y(2) = 0, y'(2) = 4$

**(c)** $yy'' + (y')^2 = (y')^3,\ y(0) = y'(0) = 0$

**(d)** $yy'' - 2x(y')^2 = 0,\ y(2) = 2, y'(2) = 0.5$

**(e)** $yy'' - (y')^2 = y^2,\ y(0) = 1, y'(0) = 0$

**(f)** $(1 + y^2)y'' = 2y(y')^2 = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 1$

**3.** Bir özel çözümü belli olan aşağıdaki denklemleri çözün.

**(a)** $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0,\ y_1(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

**(b)** $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0,\ y_1(x) = x$

**(c)** $xy'' - 2(1 + x)y' + 4y = 0,\ y_1(x) = e^{2x}$

**(d)** $(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0,\ y_1(x) = x$

**4.** Aşağıdaki denklemlerin genel çözümlerini bulun.

**(a)** $3y'' - 2y' - 8y = 0$ **(b)** $4y'' - 8y' + 5y = 0$

**(c)** $4y'' - 20y' + 25y = 0$ **(d)** $y''' - 13y' - 12y = 0$

**(e)** $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0$ **(f)** $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0$

**(g)** $64y^{(8)} + 48y^{(6)} + 12y^{(4)} + y'' = 0$

**(h)** $y^{(n)} + \dfrac{n}{1}y^{(n-1)} + \dfrac{n(n-1)}{2!}y^{(n-2)} + \ldots + \dfrac{n}{1}y' + y = 0$

5. Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün.

(a) $y''' - y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -1$

(b) $y''' + y'' = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 0$

(c) $y''' + y'' = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -1$

(d) $y''' + y' = 0,\ y(0) = 2, y'(0) = 0, y''(0) = -1$

(e) $y^{(5)} - y' = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y'''(0) = 1, y^{(4)}(0) = 2$

(f) $y^{(4)} - y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y'''(0) = -1$

6. Sağ tarafa bağlı olarak, aşağıdaki denklemlerin özel çözümünün şeklini belirleyin.

(a) $y'' + 4y = xe^{-2x}$

(b) $y'' + 3y' + 2y = x^2e^x$

(c) $y'' + m^2y = \sin \beta x$

(d) $y'' - y = xe^x$

(e) $y'' + 4y' + 4y = x^2e^{-2x}$

(f) $y'' + 3y' = xe^{-3x} + 2\sin 3x$

(g) $y'' - 2y' - 3y = x^2 + 2e^{3x} + x\cos x$

7. Aşağıdaki denklemlerin genel çözümlerini bulun (özel çözümü sağ tarafın şekline bağlı olarak belirleyin).

(a) $y'' - y = e^x$

(b) $y'' - 2y' + y = 4e^x$

(c) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$

(d) $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 30$

(e) $y'' - 3y' + 2y = 2e^x \cos\frac{x}{2}$

(f) $2y'' + 5y' = \cos^2 x$

(g) $y'' - 2y' + y = \sin x + \sinh x$

(h) $5y'' - 6y' + 5y = e^{3x/5} \sin\frac{4}{5}x$

(i) $y'' - 4y' + 4y = e^x - \sinh(x - 1)$

(j) $y^{(4)} + 2y'' + y = \cos x$

(k) $y^{(4)} + y'' = x^2 + x$

(l) $y^{(5)} - y^{(4)} = xe^x - 1$

8. Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün.

(a) $y'' - y' = 2(1 - x),\ y(0) = y'(0) = 1$

(b) $y'' - 2y' = 2e^x,\ y(1) = -1, y'(1) = 0$

(c) $y'' + y = 4e^x,\ y(0) = 4, y'(0) = -3$

(d) $y''' - y' = -2x,\ y(0) = 0, y'(0) = y''(0) = 2$

(e) $y^{(4)} - y' = 8e^x$, $y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 4, y'''(0) = 6$

**9.** Aşağıdaki denklemleri sabitlerin değiştirilmesi yöntemiyle çözün.

(a) $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$ (b) $y'' - y' = \dfrac{2 - x}{x^3}e^x$

(c) $y'' - y' = 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^{3/2}}$ (d) $y'' + y = -\cot^2 x$

(e) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$ (f) $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

**10.** $\lambda$ parametresinin hangi değerlerinde, aşağıdaki denklemlerin sıfırdan farklı tüm çözümleri sönen salınım hareketini ifade eder?

(a) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda\dfrac{dy}{dt} + y = 0$ (b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + \lambda^2 y = 0$

**11.** Aşağıdaki denklemleri çözün.

(a) $x^2y'' + xy' - \dfrac{1}{4}y = 0$ (b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

(c) $x^2y'' + xy' + y = 0$ (d) $x^2y''' - 3xy'' + 3y' = 0$

(e) $(x + 1)^2 y'' - 2(x + 1)y' + 2y = 0$

(f) $(2x + 1)^2 y'' - 2(2x + 1)y' + 4y = 0$

(g) $x^2y'' + xy' + 4y = 10x$ (h) $x^2y'' - 6y = 12\ln x$

**12.** Aşağıdaki sistemleri çözün.

(a) $\begin{cases} x' = 2tx^2 \\ y' = \dfrac{y - t}{t} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} tx' = x + \sqrt{x^2 - t^2} \\ y' = \dfrac{x + y}{y^2 - t} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' = y \\ y' = \dfrac{y^2}{x} \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -5x - 5y \end{cases}$

**13.** Aşağıdaki sabit katsayılı sistemleri çözün.

(a) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + 4y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -6x - 3y \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -10x - 4y \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x' = 4x + 5y \\ y' = -4x - 4y \end{cases}$

# BÖLÜM 4

# Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Yöntemlerle Çözümü

## 4.1 GENEL DÜŞÜNCELER

Bilindiği gibi, çoğu durumda gerek diferansiyel denklemler, gerekse de diferansiyel denklem sistemleri kareleştirilemez. Üstelik, sözü edilen denklemlerin kareleştirilebilir oldukları durumlarda, çözüm sırasında elde edilen integraller hesaplanamaz olabilir (bkz. 1, Bölüm 5.2) veya zor hesaplanır. Ayrıca, diferansiyel denklemin içerdiği bilinen fonksiyon veya fonksiyonlar cetvel şeklinde verilebilir (bkz. 1, Bölüm 1.7). Bütün bu zorlukları gidermek için, diferansiyel denklemlerin çözümüne çeşitli yaklaşık yöntemler uygulanmaktadır. Bu yöntemler *sayısal* ve *analitik* olmak üzere iki gruba ayrılabilir.

1. **Sayısal Yöntem.** Bu yöntemin uygulanmasıyla, ele alınan problemin çözümünün belli noktalarda yaklaşık değerleri bulunur.
2. **Analitik Yöntem.** Bu yöntemin uygulanmasıyla, ele alınan problemin çözümü, analitik şekilde, yani belli bir ifade (yaklaşık veya kesin) şeklinde bulunur.

Şimdi, bu yöntemleri ayrıntılı olarak açıklayalım.

## 4.2 DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL YÖNTEMLERLE ÇÖZÜMÜ

### 4.2.1 Euler Yöntemi

Önce, birinci mertebeden diferansiyel denklem için,

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

Cauchy problemini ele alıp $f(x, y)$ fonksiyonunun $(x_0, y_0)$ noktasının herhangi civarında Teorem 2'nin koşullarını sağladığını varsayalım (bkz. Bölüm

2.3). Bu durumda, (1)-(2) probleminin tek bir çözümünün varolduğu bir $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ aralığı vardır ($\delta > 0$).

Şimdi, (1)-(2) probleminin herhangi $[x_0, l]$ aralığında yaklaşık çözümünü bulalım. Bunun için önce, $[x_0, l]$ aralığını $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_{n-1} < x_n = l$ noktalarının yardımıyla $n$ sayıda eşit parçaya ayıralım. Eşit $[x_i, x_{i+1}]$ parçalarının uzunluğunu $h = x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$ ile gösterelim ($i = \overline{0, n-1}$). $h = \dfrac{l - x_0}{n}$ ve $x_i = x_0 + ih$ ($i = \overline{0, n}$) olacağı açıktır. $h$ sayısına *hesaplamanın adımı* denir (Şekil 22).

Bilindiği gibi, (1)-(2) probleminin çözümü geometrik olarak, $A_0(x_0, y_0)$ noktasından geçen ve her $(x, y)$ noktasında teğetinin eğimi $k = f(x, y)$ olan eğrinin (integral eğrisinin) bulunmasına denktir. Açık ki, sözü edilen eğrinin $(x_0, y_0)$ noktasındaki teğetinin denklemi

$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0) \quad \text{veya} \quad y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) \tag{3}$$

şeklinde olacaktır. Bu doğrusal fonksiyonu ele alınan problemin $[x_0, x_1]$ aralığındaki yaklaşık çözümü olarak kabul edelim. (Demek ki, yaklaşık olarak aranan integral eğrisini $[x_0, x_1]$ aralığında onun teğet parçasıyla değiştirdik). (3) teğetinin $x = x_1$ doğrusuyla kesişme noktasını $A_1(x_1, y_1)$ ile gösterelim. O zaman,

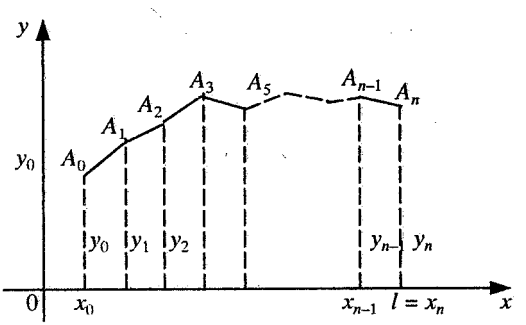
$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) \qquad \text{yani} \qquad y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

olur. Bulunan $y_1$ sayısı, ele alınan problemin çözümünün $x_1$ noktasındaki yaklaşık değeri ($y(x_1)$) olarak kabul edilir.

Yeniden yukarıdaki süreci $A_1(x_1, y_1)$ noktası için uygularsak,

$$y - y_1 = f(x_1, y_1)(x - x_1)$$

teğet doğrusunu ve bunun $x = x_2$ doğrusuyla $A_2(x_2, y_2)$ kesişme noktasının ordinatı için,




**ŞEKİL 22**

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

ifadesini elde ederiz. Bulunan $y_2$ sayısı, aranan çözümün $x_2$ noktasındaki yaklaşık değeri ( $y(x_2)$ ) olarak kabul edilir.

Süreci böyle devam ettirip, aranan çözümün $x_{i+1}$ bölüm noktalarındaki, $y(x_{i+1}) \approx y_{i+1}$ yaklaşık değerleri için,

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \qquad (i = \overline{0, n-1}) \qquad (4)$$

*işçi formülünü* elde ederiz.

(1)-(2) probleminin yaklaşık çözümünün (4) formülleriyle bulunması *Euler yöntemi* diye adlandırılır.

Görüldüğü gibi Euler yöntemi, ele alınan problemin $[x_0, l]$ aralığında yaklaşık çözümünü değil, sadece bölüm noktalarında çözümün yaklaşık değerlerini belirler. Teğet parçalarının oluşturduğu $A_0A_1A_2...A_n$ *çokgen çizgisi*, yaklaşık olarak $[x_0, l]$ aralığında, $(x_0, y_0)$ noktasından geçen integral eğrisinin yerine kabul edilir. Varlık ve teklik teoreminin koşulları sağlandığında, $n \to \infty$ için sözü edilen çokgen çizgiler dizisinin kesin çözüme (yani çözümün grafiğine) düzgün yaklaştığı gösterilebilir.

**Uyarı** $[x_0, l]$ aralığı gösterilmeden, sadece (1)-(2) probleminin yaklaşık çözümü istenebilir. O zaman, $h$ adımı seçilir ve (4) formülü koşula bağlı olarak birkaç kere uygulanır.

Euler yönteminin uygulamalarında, yapılan mutlak hatanın mertebesi $O(h)$'dır (bkz. 1, Bölüm 2.12). Demek ki, bu yöntemin yardımıyla daha yüksek kesinlikte çözüm elde etmek için $h$ adımını küçültmek yeterlidir.

---

**ÖRNEK 1** Verilen aralığı $n$ sayıda eşit parçaya ayırıp, aşağıdaki problemleri Euler yöntemiyle yaklaşık olarak çözün.

(a) $y' = \dfrac{2(y+1)}{x}$, $y(1) = 1$, $[1, 1.5]$, $n = 5$

(b) $y' = 2x^2y + y^2 + 1$, $y(0) = 1$, $[0, 0.5]$, $n = 5$

(c) $y' = xy + F(x, y)$, $y(0) = 1$ Burada, $F(x, y)$ fonksiyonu,

| $x$ | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F$ | 1 | 3.2 | 2.5 | 2.1 | 3 | 3.5 |

cetveliyle veriliyor.

○ (a) Ele alınan problemin kesin çözümü de bulunabildiğinden, problemi her iki yöntemle çözüp sonuçları karşılaştıralım.

Önce, problemin kesin çözümünü bulalım. Görüldüğü gibi, ele alınan denklem değişkenleri ayrılabilir bir denklemdir. Bunu

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{2dx}{x}$$

şeklinde yazıp genel çözümünü

$$y = Cx^2 - 1$$

olarak buluruz. Başlangıç koşulunu göz önüne aldığımızda $C = 2$ olarak buluruz ve problemin çözümü

$$y = 2x^2 - 1$$

olur.

Şimdi, problemi Euler yöntemiyle çözelim. Bunun için,

$$f(x,y) = \frac{2(y+1)}{x}, \qquad n = 5, \qquad h = 0.1, \qquad x_i = 1 + ih \ (i = \overline{0,5})$$

olduğunu göz önüne alıp (4) formülünü uygularsak, bölüm noktalarında çözümün yaklaşık değerlerini,

$$y_1 = 1 + 0.1\frac{2(1+1)}{1} = 1.4$$

$$y_2 = 1.4 + 0.1\frac{2(1.4+1)}{1.1} \approx 1.8364$$

$$y_3 = 1.8364 + 0.1\frac{2(1.8364+1)}{1.2} \approx 2.3091$$

$$y_4 = 2.3091 + 0.1\frac{2(2.3091+1)}{1.3} \approx 2.8182$$

$$y_5 = 2.8182 + 0.1\frac{2(2.8182+1)}{1.4} \approx 3.3637$$

olarak buluruz.

Bulunan yaklaşık değerleri ve kesin çözümün bölüm noktalarındaki değerlerini Çizelge 1'de yazıp her noktada yapılan mutlak hatayı ($\Delta(x_i) = |y(x_{i+1}) - y(x_i)|$) buluruz;

**Çizelge 1**

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ (yaklaşık) | $y_i(x_i)$ (kesin) | $\Delta(x_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | — |
| 1 | 1.1 | 1.4 | 1.42 | 0.02 |
| 2 | 1.2 | 1.8364 | 1.88 | 0.0436 |
| 3 | 1.3 | 2.3091 | 2.38 | 0.0709 |
| 4 | 1.4 | 2.8182 | 2.92 | 0.1018 |
| 5 | 1.5 | 3.3637 | 3.50 | 0.1363 |

(b) Görüldüğü gibi, ele alınan denklem Riccati denklemidir ve genel şekilde çözülemez.

$$f(x,y) = 2x^2y + y^2 + 1, \qquad n = 5, \qquad h = 0.1$$

olduğunu göz önüne alıp (4) formülünü uygularsak, aranan çözümün bölüm noktalarında yaklaşık değerlerini,

$$y_1 = 1 + 0.1(1 + 1) = 1.2$$
$$y_1 = 1.2$$

$$y_2 = 1.2 + 0.1\left[2(0.1)^2 \cdot 1.2 + (1.2)^2 + 1\right] = 1.4464$$
$$y_2 = 1.4464$$

$$y_3 = 1.4464 + 0.1\left[2(0.2)^2 \cdot 1.4464 + (1.4464)^2 + 1\right] \approx 1.7672$$
$$y_3 = 1.7672$$

$$y_4 = 1.7672 + 0.1\left[2(0.3)^2 \cdot 1.7672 + (1.7672)^2 + 1\right] \approx 2.2083$$
$$y_4 = 2.2083$$

$$y_5 = 2.2083 + 0.1\left[2(0.4)^2 \cdot 2.2083 + (2.2083)^2 + 1\right] \approx 2.8666$$
$$y_5 = 2.8666$$

olarak buluruz;

(c) Yine, $f(x,y) = xy + F(x,y)$, $n = 5$, $h = 0.1$ olduğunu ve bölüm noktalarında $F(x, y)$'nin değerlerini göz önüne alıp (4) formülünü uygularsak, aranan çözümün yaklaşık değerlerini,

$$y_1 = 1 + 0.1(0 \cdot 1 + 1) = 1.1 \qquad y_1 = 1.1$$

$$y_2 = 1.1 + 0.1(0.1 \cdot 1.1 + 3.2) = 1.431 \qquad y_2 = 1.431$$

$$y_3 = 1.431 + 0.1(0.2 \cdot 1.431 + 2.5) \approx 1.7096 \qquad y_3 = 1.7096$$

$y_4 = 1.7096 + 0.1(0.3 \cdot 1.7096 + 2.1) \approx 1.9709 \qquad y_4 = 1.9709$

$y_5 = 1.9709 + 0.1(0.4 \cdot 1.9709 + 3) \approx 2.3497 \qquad y_5 = 2.3497$

olarak buluruz. ○

---

Euler yöntemi, diferansiyel denklem sistemlerinin, dolayısıyla yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için kolaylıkla genelleştirilebilir (yüksek mertebeden diferansiyel denkleme uygulamadan önce, verilen denklemi diferansiyel denklem sistemine dönüştürmek gerekir). Basitlik için, söyleneni iki bilinmeyenli ($y = y(x)$, $z = z(x)$) diferansiyel denklem sistemi için,

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = \varphi(x, y, z) \end{cases} \tag{5}$$

$$y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0 \tag{6}$$

şeklinde Cauchy problemi üzerinde gerçekleştirelim ($x \in [x_0, l]$).

Yine, $[x_0, l]$ aralığını $n$ sayıda eşit parçaya ayırıp bilinmeyenlerin bölüm noktalarındaki yaklaşık değerlerini $y(x_i) \approx y_i, z(x_i) \approx z_i$ olarak kabul edersek,

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1} = z_i + h\varphi(x_i, y_i, z_i) \end{cases} \tag{7}$$

eşitlikleri yazılabilir ($i = \overline{0, n-1}$). Buradan, benzer yolla ardarda $y_1$, $z_1$, $y_2$, $z_2$ vb. bulunur.

---

**ÖRNEK 2** [1, 2] aralığında $h = 0.2$ kabul edip,

$$y'' = 3y - \frac{2x}{y}, \; y(1) = 1, \; y'(1) = 2$$

problemini Euler yöntemiyle çözün.

○ Önce, $y' = z$ kabul edip ($z = z(x)$, bilinmeyen yeni fonksiyondur) ele alınan problemi ($y'' = z', z(1) = 2$),

$$\begin{cases} y' = z, & y(1) = 1 \\ z' = 3y - \dfrac{2x}{y}, & z(1) = 2 \end{cases}$$

şekline dönüştürelim. Burada,

$$f(x,y,z) = z, \qquad \varphi(x,y,z) = 3y - \frac{2x}{y}, \qquad h = 0.2, \qquad n = 5$$

olduğunu göz önüne alıp, (7) formüllerine göre,

$$y_1 = 1 + 0.2 \cdot 2 = 1.4$$

$$z_1 = 2 + 0.2\left(3 \cdot 1 - \frac{2 \cdot 1}{1}\right) = 2.2$$

$$y_2 = 1.4 + 0.2 \cdot 2.2 = 1.84$$

$$z_2 = 2.2 + 0.2\left(3 \cdot 1.4 - \frac{2 \cdot 1.2}{1.4}\right) \approx 2.6971$$

$$y_3 = 1.84 + 0.2 \cdot 2.6971 \approx 2.3794$$

$$z_3 = 2.6871 + 0.2\left(3 \cdot 1.84 - \frac{2 \cdot 1.4}{1.84}\right) \approx 3.4968$$

$$y_4 = 2.3794 + 0.2 \cdot 3.4968 \approx 3.1788$$

$$z_4 = 3.4968 + 0.2\left(3 \cdot 2.3794 - \frac{2 \cdot 1.6}{2.3794}\right) \approx 4.6555$$

$$y_5 = 3.1788 + 0.2 \cdot 4.6555 \approx 4.1099$$

$$z_5 = 4.6555 + 0.2\left(3 \cdot 3.1788 - \frac{2 \cdot 1.8}{3.1788}\right) \approx 6.1463$$

buluruz. Böylece, ele alınan problemin çözümünün bölüm noktalarında yaklaşık değerleri,

$$y_1 = 1.4, \qquad y_2 = 1.84, \qquad y_3 = 2.3794, \qquad y_4 = 3.1788, \qquad y_5 = 4.1099$$

olarak bulunur. ○

---

**Uyarı** Görüldüğü gibi Euler yöntemi basit ve kullanışlıdır. Ancak, kesinliği yüksek değildir. Kesinliği yükseltmek için $h$ adımını çok daha küçük almak gerekir. Bu ise kendi sırasında daha uzun hesaplama gerektirir. Bu eksiklikleri gidermek için, Euler yönteminin çeşitli geliştirilmiş biçimleri kullanılmaktadır. Onlardan bir tanesini açıklayalım.

### 4.2.2* Düzenlenmiş Euler Yöntemi

Bu yöntemin uygulanmasında, $\varepsilon > 0$ maksimum hatayla, (1)-(2) probleminin $y = y(x)$ çözümünün bölüm noktalarındaki yaklaşık değerlerini bulmak için,

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)})\right], \qquad (i = \overline{0, i-1},\ k = 1, 2, 3, \ldots) \quad (8)$$

formülü kullanılır (genelde $h$ adımı, $h^3 < \varepsilon$ eşitliği sağlanacak şekilde belirlenir). Burada, $y_{i+1}^{(0)} = y_{i+1}$ değerleri (4) eşitliğiyle belirlenir. $i$ 'nin her değerinde, $y_{i+1}^{(k)}$ 'ların hesaplanmasına ($k = 1, 2, 3, \ldots$),

$$\left|y_{i+1}^{(k)} - y_{i+1}^{(k-1)}\right| < \varepsilon \qquad (9)$$

eşitsizliği sağlanıncaya kadar devam edilir (eşitsizliğe erişilmediğinde $h$ adımı küçültülür).

Söylenenleri ayrıntılı olarak bir örnekle açıklayalım.

---

**ÖRNEK 3** $y' = 2x^2 + \frac{x}{y} + 1$, $y(0) = 1$ problemini, [0, 1] aralığında maksimum $\varepsilon = 0.01$ mutlak hatayla, düzenlenmiş Euler yöntemini uygulayarak çözün.

○ Adımı $h^3 < \varepsilon = 0.01$ eşitsizliği sağlanacak şekilde seçersek, $h = 0.2$ kabul edilebilir. Bu nedenle [0, 1] aralığını beş eşit parçaya ayıralım ($n = 5$, $x_i = hi$, $i = \overline{0,5}$, $f(x, y) = 2x^2 + \frac{x}{y} + 1$).

(4) formülüne göre,

$$y_1^{(0)} = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.2\left(2 \cdot 0 + \frac{0}{1} + 1\right) = 1.2$$

yani, $y_1^{(0)} = 1.2$ buluruz.

(8) formülünde, $i = 0$, $k = 1$ kabul edip,

$$y_1^{(1)} = 1 + \frac{0.2}{2}\left[2 \cdot 0 + \frac{0}{1} + 1 + 2(0.2)^2 + \frac{0.2}{1.2} + 1\right] \approx 1.2247$$

$i = 0$, $k = 2$ kabul edip,

$$y_1^{(2)} = 1 + \frac{0.2}{2}\left[2 \cdot 0 + \frac{0}{1} + 1 + 2(0.2)^2 + \frac{0.2}{1.22247} + 1\right] \approx 1.2246$$

buluruz. $\left|y_1^{(2)} - y_1^{(1)}\right| = 0.0001 < \varepsilon$ olduğundan $y_1 = 1.2246$ kabul edilir.

Yine (4) formülüne göre ($i = 1$),

$$y_2^{(0)} = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.2246 + 0.2\left[2 \cdot (0.2)^2 + \frac{0.2}{1.2246} + 1\right] \approx 1.4733$$

buluruz, (8) formülüne göre $i = 1$, $k = 1$ olduğunda,

$$y_2^{(1)} = 1.2246 + \frac{0.2}{2}\left[2 \cdot (0.2)^2 + \frac{0.2}{1.2246} + 1 + 2 \cdot (0.4)^2 + \frac{0.4}{1.4733} + 1\right]$$
$$\approx 1.5081$$

$i = 1$, $k = 2$ olduğunda ise,

$$y_2^{(2)} = 1.2246 + \frac{0.2}{2}\left[2 \cdot (0.2)^2 + \frac{0.2}{1.2246} + 1 + 2 \cdot (0.4)^2 + \frac{0.4}{1.5081} + 1\right]$$
$$\approx 1.5075$$

elde ederiz. $\left|y_2^{(2)} - y_2^{(1)}\right| = 0.0006 < \varepsilon$ olduğundan $y_2 = 1.5075$ kabul edilir.

Benzer yolla,

$$y_3^{(0)} = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1.5075 + 0.2\left[2 \cdot (0.4)^2 + \frac{0.4}{1.5075} + 1\right] \approx 1.8246$$

$$y_3^{(1)} = 1.5075 + 0.1\left[2 \cdot (0.4)^2 + \frac{0.4}{1.5075} + 1 + 2 \cdot (0.6)^2 + \frac{0.6}{1.8246} + 1\right]$$
$$\approx 1.8609$$

$$y_3^{(2)} = 1.5075 + 0.1\left[2 \cdot (0.4)^2 + \frac{0.4}{1.5075} + 1 + 2 \cdot (0.6)^2 + \frac{0.6}{1.8209} + 1\right]$$
$$\approx 1.8703$$

bulunur ve $y_3 = 1.8703$ kabul edilir.

Aynı şekilde,

$$y_4^{(0)} = y_3 + hf(x_3, y_3) = 1.8703 + 0.2\left[2 \cdot (0.6)^2 + \frac{0.6}{1.8703} + 1\right] \approx 2.2785$$

$$y_4^{(1)} = 1.8703 + 0.1\left[2 \cdot (0.6)^2 + \frac{0.6}{1.8703} + 1 + 2 \cdot (0.8)^2 + \frac{0.8}{2.2785} + 1\right]$$
$$\approx 2.3375$$

$$y_4^{(2)} = 1.8703 + 0.1\left[2 \cdot (0.6)^2 + \frac{0.6}{1.8703} + 1 + 2 \cdot (0.8)^2 + \frac{0.8}{2.3375} + 1\right]$$
$$\approx 2.3366$$

yani $y_4 = 2.3366$, böylelikle de

$$y_5^{(0)} = y_4 + hf(x_4, y_4) = 2.3366 + 0.2\left[2 \cdot (0.8)^2 + \frac{0.8}{2.3366} + 1\right] \approx 2.8440$$

$$y_5^{(1)} = 2.3366 + 0.1\left[2\cdot(0.8)^2 + \frac{0.8}{2.3366} + 1 + 2\cdot 1^2 + \frac{1}{2.8440} + 1\right]$$
$$\approx 2.9253$$

$$y_5^{(2)} = 2.3366 + 0.1\left[2\cdot(0.8)^2 + \frac{0.8}{2.3366} + 1 + 2\cdot 1^2 + \frac{1}{2.9253} + 1\right]$$
$$\approx 2.9244$$

yani $y_5 = 2.9244$ bulunur.

Böylece, verilen problemin çözümünün, bölüm noktalarında istenen kesinlikle yaklaşık değerleri,

$$y_1 = 1.2246, \quad y_2 = 1.5075, \quad y_3 = 1.8703, \quad y_4 = 2.3366, \quad y_5 = 2.9244$$

olarak elde edilir. ○

---

### 4.2.3 Runge-Kutta[1] Yöntemi

Bu yöntemin uygulanmasında, (1)-(2) probleminin çözümünün bölüm noktalarındaki yaklaşık değerleri,

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i \\ \Delta y_i &= \frac{h}{6}\left[K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}\right], \ (i = \overline{0, n-1}) \end{aligned} \tag{10}$$

formülleriyle hesaplanır. Burada, $K_s^{(i)}$'ler $(s = \overline{1, 4})$,

$$\begin{aligned} K_1^{(i)} &= f(x_i, y_i) \\ K_2^{(i)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}\right) \\ K_3^{(i)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right) \\ K_4^{(i)} &= f(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}) \end{aligned} \tag{11}$$

eşitlikleriyle belirlenir.

Runge-Kutta yönteminin uygulanmasında, tüm $[x_0, l]$ aralığında yapılan maksimum mutlak hata $h^4$'ü aşmaz.

Şimdi, (10) – (11) formüllerinin uygulanmasını bir örnekle gösterelim.

---

[1] Carl D. T. Runge (1856-1927) – Alman matematikçi.
Martin W. Kutta (1867-1944) – Alman matematikçi.

**ÖRNEK 4** Runge-Kutta yöntemini kullanarak, adımı $h = 0.2$ kabul edip $[0, 1]$ aralığında $y' = xy + 1$, $y(0) = 1$ problemini çözün.

○ $f(x, y) = xy + 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.2$, $i = \overline{0,4}$ olduğunu göz önüne alıp, $i$ 'nin her değeri için ardarda $K_s^{(i)}$ 'leri ($s = \overline{1,4}$), sonra $\Delta y_i$ 'yi, daha sonra ise, $y_{i+1}$ 'i bulalım.

$$K_1^{(0)} = f(x_0, y_0) = 0 \cdot 1 + 1 = 1$$

$$K_2^{(0)} = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}\right) = (0 + 0.1)(1 + 0.5) + 1 = 1.15$$

$$K_3^{(0)} = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}\right) = (0 + 0.1)(1 + 0.575) + 1 = 1.1575$$

$$K_4^{(0)} = f(x_0 + h, y_0 + K_3^{(0)}) = (0 + 0.2)(1 + 1.1575) + 1 = 1.4315$$

$$\Delta y_0 = \frac{h}{6}\left[K_1^{(0)} + 2K_2^{(0)} + 2K_3^{(0)} + K_4^{(0)}\right] = \frac{0.2}{6} \cdot 7.0465 \approx 0.2349$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1.2349 \qquad \text{yani} \qquad y_1 = 1.2349$$

Benzer biçimde, dört rakam kesinliğiyle,

$$K_1^{(1)} = 1.2470,\ K_2^{(1)} = 1.5575,\quad K_3^{(1)} = 1.6041,\ K_4^{(1)} = 2.1356$$

$$\Delta y_1 = 0.3235,\quad y_2 = 1.5584$$

$$K_1^{(2)} = 1.6234,\ K_2^{(2)} = 2.1851,\quad K_3^{(2)} = 2.3255,\ K_4^{(2)} = 2.7303$$

$$\Delta y_2 = 0.4458,\quad y_3 = 2.0042$$

$$K_1^{(3)} = 2.2025,\ K_2^{(3)} = 3.1739,\quad K_3^{(3)} = 3.5138,\ K_4^{(3)} = 5.4144$$

$$\Delta y_3 = 0.6997,\quad y_4 = 2.7039$$

$$K_1^{(4)} = 3.1631,\ K_2^{(4)} = 4.8570,\quad K_3^{(4)} = 5.6192,\ K_4^{(4)} = 8.3231$$

$$\Delta y_4 = 1.0813,\quad y_5 = 3.7852$$

bulunur. Böylece, ele alınan problemin çözümünün bölüm noktalarındaki yaklaşık değerleri,

$$y_1 = 1.2349,\quad y_2 = 1.5584,\quad y_3 = 2.0042,\quad y_4 = 2.7039,\quad y_5 = 3.7852$$

olarak bulunmuş olur. ○

Aşağıda,

$$y' = xy + x,\ y(0) = 1$$

probleminin yaklaşık çözümünün, Euler ve Runge-Kutta yöntemleriyle bulunması için FORTRAN dilinde yazılmış program örneği verilmektedir. $[a, b]$ aralığı olarak, Euler yönteminde [0, 0.5], Runge-Kutta yönteminde [0, 2.5] aralığı ele alınmıştır. Adım ise sırasıyla $h = 0.05$ ve $h = 0.25$ olarak seçilmiştir.

Çözümlerden görüldüğü gibi, genelde, başlangıç noktadan uzaklaştıkça mutlak hata artar.

```
C     ***************************************************************
C     *  Euler  yöntemi  ile  dif. denklemlerin  yaklaşık  çözümü    *
C     ***************************************************************
C     *    [a,b]     -  Çözüm   aralığı                              *
C     *    x(i)      -  Düğüm  noktaları                             *
C     *    y(i)      -  Çözümün düğüm noktasındaki yaklaşık değeri   *
C     *    n         -  Nokta  sayısı                                *
C     *    h         -  Adımın  uzunluğu                             *
C     *    ykesin(i) -  Kesin çözümün düğüm noktasındaki değeri      *
C     *    f(x,y)    -  Sağ taraf                                    *
C     *    hata(i)   -  Mutlak hata                                  *
C     ***************************************************************
      dimension x(101),y(101),ykesin(101),hata(101)
      open (unit=1,file='EULER.dat')
      a=0.
      b=0.5
      n=11
      h=(b-a)/(n-1)
      y0=1.
      x(1)=a
      y(1)=y0
      do 1 i=2,n
      x(i)=a+(i-1)*h
      ykesin(i)=2.*sqrt(exp(x(i)**2))-1.
 1    continue
      do 2 i=2,n
      y(i)=y(i-1)+h*f(x(i-1),y(i-1))
 2    continue
      do 3 i=1,n
      hata(i)=abs(y(i)-ykesin(i))
 3    continue
      write (1,12)
      write (1,11)
      do 4 i=2,n
      write (1,10) x(i),ykesin(i),y(i),hata(i)
 4    continue
 10   format (5x,4f13.6)
 11   format (12x,'-------------------------------------------- ')
```

```
12    format (//,12x,'x(i)',6x,'ykesin(i)',8x,'y(i)',6x,'hata(i)')
      stop
      end

C  ---------------------------------------------

      function f(x,y)
      f=x*y+x
      return
      end
```

| x(i) | ykesin(i) | y(i) | hata(i) |
|---|---|---|---|
| .050000 | 1.002502 | 1.000000 | .002502 |
| .100000 | 1.010025 | 1.005000 | .005025 |
| .150000 | 1.022627 | 1.015025 | .007602 |
| .200000 | 1.040403 | 1.030138 | .010265 |
| .250000 | 1.063487 | 1.050439 | .013048 |
| .300000 | 1.092056 | 1.076069 | .015986 |
| .350000 | 1.126329 | 1.107211 | .019119 |
| .400000 | 1.166574 | 1.144087 | .022487 |
| .450000 | 1.213107 | 1.186968 | .026138 |
| .500000 | 1.266297 | 1.236175 | .030122 |

```
C   ***************************************************************
C   * Runge-Kutta yöntemi ile dif. denklemlerin yaklaşık  çözümü  *
C   ***************************************************************
C   *    [a,b]     -  Çözüm  aralığı                              *
C   *    x(i)      -  Düğüm  noktaları                            *
C   *    y(i)      -  Çözümün düğüm noktasındaki yaklaşık değeri  *
C   *    n         -  Nokta  sayısı                               *
C   *    h         -  Adımın  uzunluğu                            *
C   *    ykesin(i) -  Kesin çözümün düğüm noktasındaki değeri     *
C   *    f(x,y)    -  Sağ taraf                                   *
C   *    hata(i)   -  Mutlak hata                                 *
C   ***************************************************************

      dimension x(101),y(101),ykesin(101),hata(101)
      open (unit=1,file='runge.dat')
      a=0.
      b=2.5
      y0=1.
      n=11
      h=(b-a)/(n-1)
      x(1)=a
      y(1)=y0
      do 1 i=1,n
      x(i)=a+(i-1)*h
      ykesin(i)=2.*sqrt(exp(x(i)**2))-1.
1     continue
      do 2 i=1,n-1
      ak1=h*f(x(i),y(i))
```

```
      ak2=h*f(x(i)+h/2.,y(i)+ak1/2.)
      ak3=h*f(x(i)+h/2.,y(i)+ak2/2.)
      ak4=h*f(x(i)+h,y(i)+ak3)
      y(i+1)=y(i)+(ak1+2.*ak2+2.*ak3+ak4)/6.
 2    continue
      do 3 i=1,n
      hata(i)=abs(y(i)-ykesin(i))
 3    continue
      write (1,12)
      write (1,11)
      do 4 i=1,n
      write (1,10) x(i),ykesin(i),y(i),hata(i)
 4    continue
10    format (6x,f6.3,3f13.5)
11    format (5x,'-------------------------------------------- ')
12    format (//,5x,'x(i)',6x,'ykesin(i)',8x,'y(i)',6x,'hata(i)')
      stop
      end
C ---------------------------------------------
      function f(x,y)
      f=x*y+x
      return
      end
```

| x(i) | ykesin(i) | y(i) | hata(i) |
|---|---|---|---|
| .000 | 1.00000 | 1.00000 | .00000 |
| .250 | 1.06349 | 1.06349 | .00000 |
| .500 | 1.26630 | 1.26630 | .00000 |
| .750 | 1.64957 | 1.64956 | .00001 |
| 1.000 | 2.29744 | 2.29742 | .00002 |
| 1.250 | 3.36840 | 3.36831 | .00009 |
| 1.500 | 5.16043 | 5.16010 | .00034 |
| 1.750 | 8.24791 | 8.24675 | .00115 |
| 2.000 | 13.77811 | 13.77429 | .00382 |
| 2.250 | 24.13842 | 24.12604 | .01237 |
| 2.500 | 44.51979 | 44.47991 | .03988 |

Yukarıdaki çizelgeye bakacak olursak, Euler yönteminin ele alındığı aralıkta Runge-Kutta yönteminin mutlak hatasının sıfır olduğunu görürüz.

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 4.2 için)

**1.** Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini verilen $h$ için, istenen aralıkta Euler yöntemiyle çözün.

**(a)** $y' = x + y,\ y(0) = 1,\ h = 0.1,\ [0, 0.5]$

(b) $y' = \frac{1}{2}xy,\ y(0) = 1,\ h = 0.1,\ [0, 0.5]$

(c) $y' = \frac{y+1}{x},\ y(1) = 2,\ h = 0.2,\ [1, 2]$

(d) $y' = xy^2 + 1,\ y(0) = 0,\ h = 0.1,\ [0, 0.5]$

(e) $y' = \frac{y}{x+1} - y^2,\ y(0) = 1,\ h = 0.1,\ [0, 0.5]$

(f) $y' = \frac{y^2 - 2x}{y},\ y(0) = 1,\ h = 0.2,\ [0, 1]$

(g) $\begin{cases} y' = -xz, & y(0) = 1 \\ z' = xy, & z(0) = 1 \end{cases}$ $h = 0.1,\ [0, 0.5]$

(h) $\begin{cases} y' = (z + y)x, & y(0) = 1 \\ z' = (z - 2y)x, & z(0) = 1 \end{cases}$ $h = 0.1,\ [0, 0.5]$

(i) $y' = \frac{(x + y)(1 - xy)}{x + 2y},\ y(0) = 1$

2. $h = 0.1$ kabul edip Euler yöntemiyle aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün (dört terim).

(a) $y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 0$ (b) $y' = x^2 + 0.25y,\ y(2) = 4$

3. Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini istenen aralıkta 0.0001 kesinlikle düzenlenmiş Euler yöntemiyle çözün.

(a) $y' = \frac{xy}{x^2 + y^2},\ y(0) = 1,\ [0, 1]$

(b) $y' = x + y^2,\ y(0) = 0,\ [0, 0.3]$

(c) $y' = xy(y^2 - 1),\ y(0) = 0.5,\ [0, 1]$

(d) $y' = x^2 + xy + y^2 + 1,\ y(0) = 0,\ [0, 1]$

4. Runge-Kutta yöntemiyle istenen aralıkta aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün ($h = 0.2$).

(a) $y' = y - x, y(0) = 1.5,\ [0.1]$ (b) $y' = \frac{y}{x} - y^2, y(1) = 1, [1, 2]$

5. Runge-Kutta yöntemiyle, $h = 0.1$ kabul edip $[0, 0.3]$ aralığında aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün.

(a) $y' = 1 + x - y,\ y(0) = 1$ (b) $y' = \frac{x}{y} + 0.5y,\ y(0) = 1$

(c) $y' = x^2 + 0.25y^2,\ y(0) = 1$ (d) $y' = y^2 - x, y(1) = 1$

(e) $y' = \sqrt{y} - 1, y(0) = 1$ (f) $y' = \sqrt{x + y + 1}, y(0) = 1$

## 4.3 SERİ YÖNTEMİYLE DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

### 4.3.1 Ardarda Diferansiyelleme Yöntemi

Normal şekilli $n$. mertebeden diferansiyel denklem için,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{2}$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Burada, $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ belli sabitler, $f(x.y, y', ..., y^{(n-1)})$ ise $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$ noktasında ve onun herhangi civarında *analitik*, yani sözü edilen noktada kuvvet serisine açılabilir bir *fonksiyondur*. Aşağıdaki teoremin doğruluğunu kabul edelim.

**TEOREM 1** $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ fonksiyonu $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$ noktasının herhangi civarında analitik ise, o zaman $x_0$ noktasının belli bir civarında (1)-(2) probleminin tek bir çözümü vardır ve bu çözüm,

$$\begin{aligned} y(x) = y(x_0) &+ \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... \\ &+ \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

Taylor serisi şeklinde yazılabilir. (bkz. 2, Bölüm 8.4).

Bu teoremden yola çıkarak, sözü edilen koşulların sağlandığı durumda (1)-(2) probleminin çözümünü (3) şeklinde arayalım. Burada $y(x_0), y'(x_0)$, $..., y^{(n-1)}(x_0)$ katsayıları başlangıç koşullarında verilmektedir. $y^{(n)}(x_0)$, $y^{(n+1)}(x_0)$ vb. katsayıları ise (1) denkleminin yardımıyla belirlenir. Gerçekten,

$$y^{(n)}(x_0) = f(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$$

olduğu açıktır. $y^{(n+1)}(x_0)$'ı bulmak için, (1)'in her iki tarafının $x$'e göre türevini alıp $x$ yerine $x_0$ yazmak gerekir:

$$y^{(n+1)} = f'_x(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) + f'_y(x, y, y', ..., y^{(n-1)})y' + ...$$
$$+ f'_{y^{(n-1)}}(x, y, y', ..., y^{(n-1)})y^{(n)}$$

$$y^{(n+1)}(x_0) = f'_x(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}) + f'_y(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)})y'_0$$
$$+ \cdots + f'_{y^{(n-1)}}(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)})y_0^{(n)}$$

($x$'e göre türev alırken, bileşik fonksiyonun türevi formülünü kullandık). Benzer biçimde, ardarda diferansiyellemeyle $y^{(n+2)}(x_0)$ vb. katsayıları belirlenir. (Bütün katsayıların belirlenmesi için her zaman genel bir formülün bulunamadığının altını çizelim).

(3) serisi (yani onun toplamı), kendi yakınsaklık bölgesinde (1)-(2) probleminin çözümüdür (kesin çözüm).

(3) serisinin bütün katsayıları için tekrarlama formülü bulunamadığı durumlarda, istenen kesinliğe bağlı olarak, serinin herhangi kısmi toplamı (1)-(2) probleminin yaklaşık çözümü olarak kabul edilir. Örneğin, bulunan son katsayı $y^{(k)}(x_0)$ ise $(k > n)$, yaklaşık çözüm olarak,

$$y(x) \approx y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{4}$$

kabul edilebilir.

$x_0 = 0$ özel durumunda, (3) serisi ve (4) yaklaşık çözümü sırasıyla,

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \tag{3*}$$

ve

$$y(x) \approx y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{y^{(k)}(0)}{k!}x^k \tag{4*}$$

şeklini alır.

Yukarıda söylenenler, benzer koşullar sağlandığında, $n$ bilinmeyenli birinci mertebeden normal diferansiyel denklemler sistemi için

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y'_n = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{5}$$

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, ..., y_n(x_0) = y_{n0} \tag{6}$$

Cauchy problemine de uygulanabilir.

**Uyarı 1** Ardarda diferansiyelleme yöntemi, gerek diferansiyel denklemler, gerekse de diferansiyel denklem sistemlerinin genel çözümlerinin bulunmasına da uygulanabilir. O halde, başlangıç değerler yerine sırasıyla $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sabitleri alınır.

**Uyarı 2** Problem çözümünde, koşul olarak ilk $k$ sayıda terimin değil, ilk $k$ sayıda sıfırdan farklı terimin bulunması istenebilir. O halde, daha yüksek mertebeden türevlerin ve bunların $x_0$ noktasındaki değerlerinin hesaplanması gerekebilir.

---

**ÖRNEK 1** Ardarda diferansiyelleme yönteminin yardımıyla aşağıdaki problemlerin çözümünün ilk $k$ sayıda terimini bulun.

(a) $y' = \sin(x + y)$, $y(0) = 0$, $k = 5$

(b) $y'' = 3(y')^2 + 2xy + 1$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$, $k = 6$

○ Her iki seçenekte serinin ilk $k$ sayıda terimi istendiğinden, $y(x)$'in $k - 1$ mertebeye kadar türevini almak gerekiyor.

(a) $f(x, y) = \sin(x + y)$ fonksiyonunun (0, 0) noktasının civarında Teorem 1'in koşullarını sağladığı açıktır. Denklemin şeklinden ve başlangıç koşulundan, $y'(0) = 0$ olduğu görülmektedir.

Şimdi, denklemin her iki tarafının ardarda türevlerini ve bu türevlerin $x = 0$ noktasında değerlerini bulalım:

$$y'' = (1 + y')\cos(x + y),\ y''(0) = 1$$

$$y'''(0) = y''\cos(x + y) - (1 + y')^2 \sin(x + y),\ y'''(0) = 1$$

$$y^{(4)} = y'''\cos(x + y) - 3y''(1 + y')\sin(x + y) - (1 + y')^3 \cos(x + y),$$
$$y^{(4)}(0) = 0$$

Bulunan değerleri (4*) ifadesinde göz önüne alırsak, aranan yaklaşık çözüm

$$y(x) \approx \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

olarak bulunur (ilk beş terimin istenmesine rağmen, sıfırdan farklı iki terim vardır);

(b) $f(x, y, y') = 3(y')^2 + 2xy + 1$ olup, (0, 1, 0) noktası civarında Teorem 1'in koşullarını sağladığı açıktır (ilerideki örneklerde bunu söylemekten vazgeçeceğiz).

Denklemden, $y''(0) = 1$ olduğu açıktır.

Yine denklemin her iki tarafını ardarda üç kere diferansiyelleyerek $x = 0$ alalım:

$$y''' = 6y'y'' + 2y + 2xy', \quad y'''(0) = 2$$

$$y^{(4)} = 6(y'')^2 + 6y'y''' + 4y' + 2xy'', \quad y^{(4)}(0) = 6$$

$$y^{(5)} = 18y''y''' + 6y'y^{(4)} + 6y'' + 2xy''', \quad y^{(5)}(0) = 42$$

Bulunan sonuçları (4*) ifadesinde göz önüne alırsak, aranan yaklaşık çözümünü

$$y(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{20}x^5$$

olarak buluruz. ○

---

**ÖRNEK 2** Ardarda diferansiyelleme yöntemiyle, *Airy*[1] *denklemi* adını taşıyan,

$$y'' = xy \tag{A}$$

denkleminin genel çözümünü $x$'in kuvvetlerine göre seri şeklinde bulun.

○ $x = 0$ noktasında başlangıç değerlerini $y(0) = C_0$, $y'(0) = C_1$ olarak kabul edip çözümü (3*), yani

$$y(x) = C_0 + \frac{C_1}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \tag{*}$$

şeklinde arayalım.

Denklemden, $y''(0) = 0$ olduğu görülmektedir.

Denklemin her iki tarafının $x$'e göre ardarda türevlerini alırsak,

$$y'''(x) = y + xy'$$

$$y^{(4)}(x) = 2y' + xy''$$

$$y^{(5)}(x) = 3y'' + xy'''$$

.....

$$y^{(k)}(x) = (k-2)y^{(k-3)} + xy^{(k-2)}$$

.....

---

[1] George Airy (1801-1892) – İngiliz gökbilimci ve matematikçi. Airy denklemi, Işığın Kırınımı teorisinde sıklıkla kullanılmaktadır.

olduğunu görürüz. Burada $x = 0$ alıp $y(0)$, $y'(0)$ ve $y''(0)$ değerlerini göz önünde bulundurursak,

$$y'''(0) = C_0, \quad y^{(4)}(0) = 2C_1, \quad y^{(5)}(0) = 0$$

$$y^{(6)}(0) = 4 \cdot 1C_0, \quad y^{(7)}(0) = 5 \cdot 2C_1, \quad y^{(8)}(0) = 0, \ldots$$

yani genel olarak tüm $k = \overline{0, \infty}$ için

$$\begin{aligned} y^{(3k)}(0) &= (3k-2)y^{(3k-3)}(0) = (3k-2)(3k-5)y^{(3k-6)}(0) = \cdots \\ &= (3k-2)(3k-5)\cdots 4 \cdot 1C_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{(3k+1)}(0) &= (3k-1)y^{(3k-2)}(0) = (3k-1)(3k-4)y^{(3k-5)}(0) = \cdots \\ &= (3k-1)(3k-4)\cdots 5 \cdot 2C_1 \end{aligned}$$

$$y^{(3k+2)}(0) = 0$$

elde ederiz.

Bulunan $y^{(k)}(0)$'ları (*) eşitliğinde yazıp $C_0$ ve $C_1$ sabitlerine göre gruplama yaparsak, Airy denkleminin genel çözümü

$$\begin{aligned} y(x) = C_0\left[1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{4 \cdot 1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(3k-2)(3k-5)\cdots 4 \cdot 1}{(3k)!}x^{3k} + \cdots\right] + \\ C_1\left[x + \frac{2}{4!}x^4 + \frac{5 \cdot 2}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(3k-1)(3k-4)\cdots 5 \cdot 2}{(3k+1)!}x^{3k+1} + \cdots\right] \end{aligned} \qquad (**)$$

olarak bulunur. Eşitliğin sağ tarafındaki her iki serinin yakınsaklık yarıçapının $R = \infty$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir (bkz. 2, Bölüm 8.9). Sözü edilen serilerin toplamını sırasıyla $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ ile gösterelim:

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{4 \cdot 1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(3k-2)(3k-5)\cdots 4 \cdot 1}{(3k)!}x^{3k} + \cdots$$

$$y_2(x) = x + \frac{2}{4!}x^4 + \frac{5 \cdot 2}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(3k-1)(3k-4)\cdots 5 \cdot 2}{(3k+1)!}x^{3k+1} + \cdots$$

$y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonlarına *Airy fonksiyonları* denir.

Böylece, Airy fonksiyonlarının yardımıyla Airy denkleminin genel çözümü

$$y(x) = C_0 y_1(x) + C_1 y_2(x)$$

şeklinde yazılabilir. ○

Airy fonksiyonları düzenlenip,

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{3\cdot 2}x^3 + \frac{1}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^6 + \cdots + \frac{1}{[3k(3k-1)][(3k-3)(3k-4)]\cdots[3\cdot 2]}x^{3k} + \cdots$$

$$y_2(x) = x + \frac{1}{4\cdot 3}x^4 + \frac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^7 + \cdots + \frac{1}{[(3k+1)3k][(3k-2)(3k-3)]\cdots[4\cdot 3]}x^{3k+1} + \cdots$$

şeklinde de yazılabilir.

---

**ÖRNEK 3** $\begin{cases} y' = z\sin x - y\cos x \\ z' = z\cos x + y\sin x \end{cases}$ $y(0) = 0, z(0) = 1$ Cauchy probleminin çözümünün Taylor serisine açılımının ilk beş terimini bulup yaklaşık çözümünü yazın.

○ Koşula göre, problemin yaklaşık çözümünü

$$\begin{aligned} y(x) &\approx y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 \\ z(x) &\approx z(0) + \frac{z'(0)}{1!}x + \frac{z''(0)}{2!}x^2 + \frac{z'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 \end{aligned} \qquad (***)$$

şeklinde aramak gerekir. Başlangıç koşullarını göz önüne aldığımızda, sistemden $y'(0) = 0$, $z'(0) = 1$ bulunur. Diğer katsayıları bulmak için, sistemin her iki denklemini ardarda üç kere diferansiyelleyip $x = 0$ alalım:

$$y''(x) = z'\sin x + z\cos x - y'\cos x + y\sin x, \qquad y''(0) = 1$$

$$z''(x) = z'\cos x - z\sin x + y'\sin x + y\cos x, \qquad z''(0) = 1$$

$$\begin{aligned} y'''(x) &= (z'' + y')\sin x + (z' + y)\cos x \\ &\quad + (z' - y'')\cos x - (z - y')\sin x \end{aligned} \qquad y'''(0) = 1$$

$$\begin{aligned} z'''(x) &= (z'' + y')\cos x - (z' + y)\sin x \\ &\quad - (z' - y'')\sin x - (z - y')\cos x \end{aligned} \qquad z'''(0) = 0$$

$$\begin{aligned} y^{(4)}(x) &= (z''' + 2y'' - z')\sin x + (z'' + 2y' - z)\cos x \\ &\quad + (2z'' + y' - y''')\cos x - (2z' + y - y'')\sin x \end{aligned} \qquad y^{(4)}(0) = 1$$

$$\begin{aligned} z^{(4)}(x) &= (z''' + 2y'' - z')\cos x - (z'' + 2y' - z)\sin x \\ &\quad - (2z'' + y' - y''')\sin x - (2z' + y - y'')\cos x \end{aligned} \qquad z^{(4)}(0) = 0$$

Katsayıların bulunan değerlerini (***) eşitliklerinde göz önüne aldığımızda, yaklaşık çözümün analitik ifadesini

$$y(x) \approx \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4, \qquad z(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

olarak buluruz. ○

---

### 4.3.2 Belirsiz Katsayılar Yöntemi

Söz konusu yöntemin uygulanmasında, ele alınan problemin veya denklemin çözümü

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \tag{7}$$

kuvvet serisi şeklinde aranır. Burada $c_k$ $(k = \overline{0, \infty})$, belirlenmesi gereken belirsiz katsayılardır. Denklem $n$. mertebeden olduğunda, belirsiz katsayıların ilk $n$ tanesi, başlangıç değer problemi çözüldüğünde, başlangıç koşullarının yardımıyla belirlenir, genel çözüm istendiğinde ise başlangıç koşulları olarak keyfi sabitler kabul edilir. Terim terim diferansiyelleme, kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını değiştirmediğinden (bkz. 2, Bölüm 8.10), diğer katsayıları belirlemek için, (7) eşitliğinin her iki tarafının $n$. mertebeye kadar türevlerini alıp (1) denkleminde yazarak, eşitliğin her iki tarafındaki $(x - x_0)^k$'ların ($x_0 = 0$ özel durumunda ise $x^k$'ların) katsayılarını birbirleriyle karşılaştırmak gerekir. Karşılaştırmada, katsayıları belirlemek için, genel tekrarlama formülü alınabilir veya alınmayabilir. Birinci durumda denklemin çözümü (kesin çözüm) kuvvet serisi şeklinde bulunur. İkinci durumda ise, çözüm olarak (yaklaşık çözüm) aranan serinin herhangi kısmi toplamı kabul edilir.

Açıklanan yöntemin doğrusal diferansiyel denklemlere uygulanması daha elverişlidir. Yöntemin ikinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklem için,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{8}$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_0' \tag{9}$$

Cauchy problemine uygulanmasını açıklayalım. Burada $p(x)$, $q(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonlarının $x = 0$ noktasının herhangi civarında analitik olduklarını kabul edip,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \qquad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k \tag{10}$$

seri açılımlarını yazalım ve (8)-(9) probleminin çözümünü

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{11}$$

şeklinde arayalım. Son eşitliğin her iki tarafının $x$'e göre birinci ve ikinci mertebeden türevlerini alırsak,

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}, \qquad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} \tag{12}$$

veya

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k, \qquad y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k \tag{12*}$$

olur. $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, $y(x)$, $y'(x)$ ve $y''(x)$'in serilerini (8) denkleminde yazalım:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$$

Burada, kuvvet serilerinin çarpma işlemini yapıp (bkz. 2, Bölüm 8.11) $x$'in her iki taraftaki aynı kuvvetlerinin katsayılarını eşitlersek,

$$x^0 : 2 \cdot 1 c_2 + p_0 c_1 + q_0 c_0 = f_0$$

$$x^1 : 3 \cdot 2 c_3 + 2 p_0 c_2 + p_1 c_1 + q_0 c_1 + q_1 c_0 = f_1$$

$$x^2 : 4 \cdot 3 c_4 + 3 p_0 c_3 + 2 p_1 c_2 + p_2 c_1 + q_0 c_2 + q_1 c_1 + q_2 c_0 = f_2 \tag{13}$$

.....

$$x^k : (k+2)(k+1) c_{k+2} + [p_k c_1 + 2 p_{k-1} c_2 + 3 p_{k-2} c_3 + \ldots$$
$$+ (k+1) p_0 c_{k+1}] + (q_k c_0 + q_{k-1} c_1 + \ldots + q_0 c_k) = f_k$$

.....

olur. (13) eşitliklerindeki belirsiz $c_0$ ve $c_1$ katsayıları (9) başlangıç koşullarına göre, diğer $c_2, c_3, \ldots, c_k, \ldots$ katsayıları ise birinci eşitlikten başlamak üzere ardarda bulunabilir.

Bulunan katsayılar göz önüne alındığında, elde edilen $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ serisinin yakınsaklık yarıçapının (10) serilerinin ortak yakınsaklık yarıçapıyla aynı olduğu ve sözü edilen serinin (8)-(9) probleminin çözümü olduğu ispatlanabilir (bunların doğruluğunu kabul edelim).

(7) denklemindeki $p(x)$, $q(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları $x$'in kuvvetlerine göre çokterimli olduğunda hesaplama daha kolaylıkla yapılır.

---

**ÖRNEK 4** *Hermite*[1] *denklemi* diye adlandırılan,

$$y'' - 2xy' + 2py = 0 \tag{H}$$

denklemini, belirsiz katsayılar yöntemiyle çözün ($x_0 = 0, p = sb$).

○ Görüldüğü gibi, denklemin katsayıları $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı olup gerekli koşulları sağlamaktadır. Bu nedenle, $y(0) = c_0, y'(0) = c_1$ kabul edip çözümü,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

kuvvet serisi şeklinde arayalım. Buradan, biçimsel olarak

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1}, \qquad y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2} x^k$$

bulup ((12*) eşitliklerine bakın) $y(x)$, $y'(x)$ ve $y''(x)$'in ifadelerini denklemde yazarsak,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2} x^k - 2\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^k + 2p\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

veya $k = 0$ durumunu ayırarak,

$$2 \cdot 1c_2 + 2pc_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+2)(k+1)c_{k+2} - 2(k-p)c_k\right] x^k = 0$$

elde ederiz. Buradan, belirsiz katsayılar yöntemine göre,

$$2 \cdot 1c_2 + 2pc_0 = 0 \quad \text{yani} \quad c_2 = -\frac{2}{2!} pc_0$$

ve

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} - 2(k-p)c_k = 0 \quad (k \geq 1)$$

olur. Son eşitlikten,

$$c_{k+2} = -\frac{2(p-k)}{(k+2)(k+1)} c_k \quad (k \geq 1)$$

---

[1] Şarl Ermit (Charles Hermite) (1822-1901) – Fransız matematikçi.

elde ederiz. Şimdilik $p \notin N_0\{0, 1, 2, ..., n, ...\}$ olsun. Son eşitlikten, $c_{2k}$'ların $c_0$ ile, $c_{2k+1}$'lerin ise $c_1$ ile $(k = \overline{1,\infty})$ ifade edildiği açıkça görülür ve

$$c_2 = -\frac{2p}{2!}c_0, \qquad c_4 = \frac{2^2 p(p-2)}{4!}c_0, \qquad c_6 = \frac{2^3 p(p-2)(p-4)}{6!}c_0, \ldots$$

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{2^k p(p-2)\cdots(p-2k+2)}{(2k)!}c_0, \ldots$$

$$c_3 = -\frac{2(p-1)}{3!}c_1, \qquad c_5 = \frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!}c_1, \ldots$$

$$c_{2k+1} = (-1)^k \frac{2^k(p-1)(p-3)\cdots(p-2k+1)}{(2k+1)!}c_1, \ldots$$

olarak belirlenir.

Böylece, Hermite denkleminin genel çözümü

$$\begin{aligned} y(x) = c_0\Bigg[1 &- \frac{2p}{2!}x^2 + \frac{2^2 p(p-2)}{4!}x^4 + \cdots \\ &+ (-1)^k \frac{2^k p(p-2)\cdots(p-2k+2)}{(2k)!}x^{2k} + \cdots\Bigg] \\ + c_1\Bigg[x &- \frac{2(p-1)}{3!}x^3 + \frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!}x^5 + \cdots \\ &+ (-1)^k \frac{2^k(p-1)(p-3)\cdots(p-2k+1)}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots\Bigg] \end{aligned}$$

veya

$$y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$$

olarak bulunur. Burada,

$$\begin{aligned} y_1(x) = 1 &- \frac{2p}{2!}x^2 + \frac{2^2 p(p-2)}{4!}x^4 + \cdots \\ &+ (-1)^k \frac{2^k p(p-2)\cdots(p-2k+2)}{(2k)!}x^{2k} + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(x) = x &- \frac{2(p-1)}{3!}x^3 + \frac{2(p-1)(p-3)}{5!}x^5 + \cdots \\ &+ (-1)^k \frac{2^k(p-1)(p-3)\cdots(p-2k+1)}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots \end{aligned}$$

olup *Hermite fonksiyonları* diye adlandırılır (sağ taraftaki seriler için $R = \infty$ olduğu gösterilebilir).

Hermite fonksiyonlarının doğrusal bağımsızlığı açıktır ($x = 0$ noktasında $W[y_1, y_2] \neq 0$ olduğundan. Bkz. Bölüm 3.2).

Hermite fonksiyonlarının şeklinden görüldüğü gibi, $p = n \in N_0$ olduğunda, $n$'nin çift veya tek olmasına bağlı olarak, bunlardan biri $n$. dereceden çokterimliye dönüşür ($n$ çift olduğunda $y_1(x)$ fonksiyonu, tek olduğunda ise $y_2(x)$ fonksiyonu). Bu çokterimlilere *Hermite çokterimlileri* denir ve $H_n(x)$ ile gösterilir. Örneğin, $n = 0, 2, 4$ değerlerinde Hermite çokterimlileri sırasıyla,

$$H_0(x) = 1, \qquad H_2(x) = 1 - 2x^2, \qquad H_4(x) = 1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4$$

$n = 1, 3, 5$ değerlerinde ise,

$$H_1(x) = x, \qquad H_3(x) = x - \frac{2}{3}x^3, \qquad H_5(x) = x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5$$

olarak bulunur. Her somut $n$ için ($n = \overline{0,5}$) Hermite çokterimlisinin,

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

denklemini sağladığı kolaylıkla denetlenebilir. ○

---

**ÖRNEK 5** $y'' - xy' + 3y = \sin x$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$ başlangıç değer probleminin seri çözümünün ilk 10 sayıda terimini bulun.

○ Ele alınan problem için,

$$p(x) = -x, \quad q(x) = 3, \quad f(x) = \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

olduğunu göz önüne alıp, çözümü

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

kuvvet serisi şeklinde arayalım. Bu durumda, yine

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}, \quad y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k$$

olur. $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ ve $\sin x$'in açılımlarını denklemde yazıp sabit terimi ayırırsak,

$$2 \cdot 1c_2 + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+2)(k+1)c_{k+2} - (k-3)c_k]x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

olur. Burada, $x$'in aynı kuvvetlerinin katsayılarını eşitlersek, ilk 10 sayıda katsayıyı belirlemek için,

$$x^0 : 2 \cdot 1c_2 c_0 = 0, \qquad x^4 : 6 \cdot 5c_6 - c_4 = 0$$

$$x^1 : 3 \cdot 2c_3 + 2c_1 = 1 \qquad x^5 : 7 \cdot 6c_7 - 2c_5 = \frac{1}{5!}$$

$$x^2 : 4 \cdot 3c_4 + c_2 = 0 \qquad x^6 : 8 \cdot 7c_8 - 3c_6 = 0$$

$$x^3 : 5 \cdot 4c_5 = -\frac{1}{3!} \qquad x^7 : 9 \cdot 8c_9 - 4c_7 = -\frac{1}{7!}$$

sistemini elde ederiz. Başlangıç koşullarına göre, $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ olduğunu göz önüne alırsak, $c_{2k} = 0$ $(k = 1, 2, ...)$ ve

$$c_3 = -\frac{1}{3!}, \quad c_5 = -\frac{1}{5!}, \quad c_7 = -\frac{1}{7!}, \quad c_9 = -\frac{5}{9!}$$

elde ederiz.

Böylece, ele alınan problemin yaklaşık çözümü

$$y(x) \approx x - \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 - \frac{1}{9!}x^9$$

olarak kabul edilebilir. ○

---

### 4.3.3 Frobenius Yöntemi

Önce ikinci mertebeden

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{12}$$

doğrusal diferansiyel denklemini ele alalım. Burada, $a_i(x)$ $(i = 0, 1, 2)$ fonksiyonları herhangi aralıkta tanımlı ve gerekli özelliklere sahip fonksiyonlardır. Bilindiği gibi, $a_0(x)$'in sıfırdan farklı olduğu aralıkta (12) denklemi

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{13}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $p(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}$, $q(x) = \dfrac{a_2(x)}{a_0(x)}$'tir.

**Tanım 1** $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının analitik olduğu $x_0$ noktasına, (13) denkleminin *basit noktası* denir. Basit olmayan noktaya ise sözü edilen denklemin *tekil noktası* denir.

Örneğin, $x = 0$ noktası,

$$y'' + x^2 y' + y\cos x = 0, \qquad y'' + e^x y' + xy = 0, \qquad (x+1)y'' + xy' - y = 0$$

denklemleri için basit,

$$y'' + \frac{x+1}{x}y' - y = 0, \quad y'' + \frac{\sin x}{x^2}y' + \frac{1}{x}y = 0, \quad xy'' + (x+1)y' + y = 0$$

denklemleri içinse tekil noktadır.

Şimdi, tekil nokta civarında ikinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklemlerin seri çözümünü inceleyelim. Bunun için önce,

$$x^2 y'' - 2y = 0$$

denklemini ele alalım. Görüldüğü gibi $x = 0$, ele alınan denklem için tekil noktadır ($q(x) = -2/x^2$ olduğundan). Çözümü biçimsel olarak,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

kuvvet serisi şeklinde ararsak, $y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}$ olur ve denklem

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k - 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0 \qquad \text{veya}$$

$$-2c_0 - 2c_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1) - 1]c_k x^k = 0$$

şeklinde yazılabilir. Buradan, belirsiz katsayılar yöntemiyle $c_0 = c_1 = 0$ ve $c_k = 0$ $(k = \overline{2,\infty})$ elde ederiz. Yani $y(x) \equiv 0$ olur. Demek ki, ele alınan denklemin aradığımız şekilde seri çözümü yoktur (açık çözüm hariç). Öte yandan, denklemin Euler denklemi olduğunu göz önüne alırsak, çözümü $y = x^r$ şeklinde arayıp,

$$r(r-1) - 2 = 0 \qquad \text{ve} \qquad r_1 = -1, r_2 = 2$$

buluruz (bkz. Bölüm 3.7). Yani, $x \neq 0$ için, ele alınan denklemin özel çözümleri $y_1(x) = x^{-1}$ ve $y_2(x) = x^2$, genel çözümü ise

$$y(x) = C_1 x^{-1} + C_2 x^2$$

şeklindedir.

Yukarıdaki açıklamalardan, aşağıdaki sorular çıkmaktadır.

1. Tekil noktaya sahip doğrusal diferansiyel denklemin ne zaman seri çözümü vardır?
2. Seri çözümü varsa ne şekildedir?

Bu soruları yanıtlamak için önce aşağıdaki tanımı verelim.

**Tanım 2** $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ denkleminin $x_0$ tekil noktasında,

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)p(x) \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 q(x) \tag{14}$$

limitleri aynı zamanda varolduğunda, $x_0$ 'a sözü edilen denklemin *düzgün tekil noktası*, aksi durumda ise *düzgün olmayan tekil noktası* denir.

---

**ÖRNEK 6** Aşağıdaki denklemlerin tekil noktalarının varlığını inceleyin. Tekil noktanın varlığı durumunda türünü belirleyin.

**(a)** $(1 + x^2)y'' + xy' + y \sin x = 0$

**(b)** $(1 - x^2)y'' + (1 - x)y' + xy = 0$

**(c)** $x^3 y'' + x^2 y' + (1 + x)y = 0$

**(d)** $y'' + \dfrac{1}{x} y' + \dfrac{1 + x}{x^2} y = 0$

○ **(a)** Ele alınan denklemi

$$y'' + \frac{x}{1 + x^2} y' + \frac{\sin x}{1 + x^2} y = 0$$

şeklinde düzenleyip $p(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ ve $q(x) = \dfrac{\sin x}{1 + x^2}$ fonksiyonlarının $(-\infty, \infty)$ aralığında analitik olduklarını göz önüne alırsak, denklemin tekil noktasının varolmadığı açıktır;

**(b)** Benzer yolla, $p(x) = \dfrac{1 - x}{1 - x^2}$ ve $q(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$ olduğunu belirleyip $x = \pm 1$ noktalarının tekil noktalar olduğunu görüyoruz.

$$\lim_{x \to -1} (1 + x)p(x) = \lim_{x \to -1} (1 + x) \frac{1 - x}{1 - x^2} = 1$$

$$\lim_{x \to -1} (1 + x)^2 q(x) = \lim_{x \to -1} (1 + x)^2 \frac{x}{1 - x^2} = \lim_{x \to -1} \frac{(1 + x)x}{1 - x} = 0$$

ve

$$\lim_{x\to 1}(1-x)p(x) = \lim_{x\to 1}(1-x)\frac{1-x}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1+x} = 0$$

$$\lim_{x\to 1}(1-x)^2 q(x) = \lim_{x\to 1}(1-x)^2\frac{x}{1-x^2} = \lim_{x\to -1}\frac{(1-x)x}{1+x} = 0$$

olduğundan, her iki nokta düzgün tekil noktadır;

(c) Benzer biçimde $\left(p(x) = \dfrac{1}{x}, q(x) = \dfrac{1+x}{x^3}\right)$, $x = 0$ tekil noktası,

$$\lim_{x\to 0} xp(x) = \lim_{x\to 0} x\frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 q(x) = \lim_{x\to 0} x^2\frac{1+x}{x^3} = \infty$$

olduğundan, düzgün olmayan tekil noktadır;

(d) Ele alınan denklem için, $x = 0$ tekil noktası,

$$\lim_{x\to 0} xp(x) = \lim_{x\to 0} x\frac{1}{x} = 1$$

ve

$$\lim_{x\to 0} x^2 q(x) = \lim_{x\to 0} x^2\frac{1+x}{x^2} = 1$$

olduğundan, düzgün tekil noktadır. ○

---

Tekil nokta civarında seri çözümünü açıklamadan önce, aşağıdaki tanımı verelim.

**Tanım 3** $\forall r \in R$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{r+k} \qquad \text{veya} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^{r+k}$$

şeklindeki seriye *genelleştirilmiş kuvvet serisi* denir.

Şimdi, (13) denkleminin düzgün tekil nokta civarında çözümünün bulunması için uygulanan ve *Frobenius*[1] *yöntemi* diye adlandırılan yöntemi açıklayalım. Basitlik için önce yöntemi,

$$3xy'' + 2y' - y = 0 \tag{15}$$

denklemi üzerinde gerçekleştirelim. Görüldüğü gibi $x = 0$, ele alınan denklemin düzgün tekil noktasıdır. Denklemin çözümünü,

---

[1] Ferdinand George Frobenius (1849-1917) – İngiliz matematikçi.

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad \text{yani} \quad y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{r+k} \tag{16}$$

genelleştirilmiş kuvvet serisi şeklinde arayalım. $r$ ve $c_k$ 'ları $(k = \overline{0,\infty})$ belirlemek için, (16) eşitliğinden biçimsel olarak,

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)c_k x^{r+k-1}$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1)c_k x^{r+k-2}$$

bulup $y(x), y'(x)$ ve $y''(x)$ 'in ifadelerini (15) denkleminde yazalım:

$$3\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)(r+k-1)c_k x^{r+k-1} + 2\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)c_k x^{r+k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{r+k} = 0$$

Son eşitlikte $x^{r-1}$ 'i içeren terimi ayırıp (yani ilk iki toplamda $k = 0$ alıp), üçüncü toplamda ise $k$ yerine $k-1$ yazarsak,

$$r(3r-1)x^{r-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(r+k)(3r+3k-1)c_k - c_{k-1}\right]x^{r+k-1} = 0$$

olur. Belirsiz katsayılar yöntemine göre buradan,

$$r(3r-1) = 0 \tag{17}$$

ve

$$(r+k)(3r+3k-1)c_k - c_{k-1} = 0, \quad (k = \overline{1,\infty}) \tag{18}$$

denklemlerini elde ederiz. (17) denklemine (15) denkleminin *belirleyici denklemi* denir. Bu durumda, belirleyici denklemin kökleri $r_1 = 0, r_2 = 1/3$ 'tür.

(18) denkleminden,

$$c_k = \frac{c_{k-1}}{(r+k)(3r+3k-1)}, \qquad (k = \overline{1,\infty}) \tag{18*}$$

bulunur. Burada, $c_0 \neq 0$ kabul edip (aksi takdirde açık çözüm elde edilir) sırasıyla $r_1 = 0$ ve $r_2 = 1/3$ değerleri için $c_1, c_2, ..., c_k, ...$ katsayılarını belirleyelim.

**1.** $r = 0$ alırsak,

$$c_k = \frac{c_{k-1}}{k(3k-1)}, \qquad (k = \overline{1,\infty})$$

olur ve buradan,

$$c_1 = \frac{c_0}{1\cdot 2},\quad c_2 = \frac{c_1}{2\cdot 5} = \frac{c_0}{(1\cdot 2)(2\cdot 5)},\quad c_3 = \frac{c_2}{3\cdot 8} = \frac{c_0}{(1\cdot 2\cdot 3)(2\cdot 5\cdot 8)},\ldots,$$

$$c_k = \frac{c_0}{k!2\cdot 5\cdot 8\cdots(3k-1)},\ldots$$

elde ederiz.

Böylece, $r = 0$ için çözüm (özel),

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!2\cdot 5\cdot 8\cdots(3k-1)} x^k \tag{19}$$

olarak bulunur ($c_0 = 1$ kabul ettik).

**2.** $r = 1/3$ alırsak, (18*) eşitliğinden,

$$c_k = \frac{c_{k-1}}{k(3k+1)},\ (k = \overline{1,\infty})$$

elde edilir ve buradan,

$$c_1 = \frac{c_0}{1\cdot 4},\quad c_2 = \frac{c_1}{2\cdot 7} = \frac{c_0}{(1\cdot 2)(4\cdot 7)},\quad c_3 = \frac{c_2}{3\cdot 10} = \frac{c_0}{(1\cdot 2\cdot 3)(4\cdot 7\cdot 10)},\ldots,$$

$$c_k = \frac{c_0}{k!4\cdot 7\cdot 10\cdots(3k+1)},\ldots$$

bulunur.

Demek ki, $r = 1/3$ için çözüm (özel),

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!4\cdot 7\cdot 10\cdots(3k+1)} x^{\frac{1}{3}+k} \tag{20}$$

olur (yine $c_0 = 1$ kabul ettik).

Elde edilen (19) ve (20) serilerinin $(-\infty,\infty)$ aralığında düzgün yakınsaklığı kolaylıkla gösterilebilir (bkz. 2, Bölüm 8.4 ve 8.9). Ayrıca, $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonlarının doğrusal bağımsızlığı açıktır.

Böylece, $(0,\infty)$ aralığında (aynı zamanda $(-\infty,0)$ aralığında) (15) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{21}$$

olarak bulunur.

Açıklanan örnek temel alındığında, Frobenius yönteminin özü aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

**Frobenus Kuralı** $x = 0$, (13) denkleminin düzgün tekil noktası ise, denklemin çözümü,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{r+k}$$

genelleştirilmiş kuvvet serisi şeklinde aranır ($r = ?\, c_k = ?\, k = \overline{1, \infty}$) ve aşağıdaki aşamalar gerçekleştirilir.

**1. Aşama** $y(x), y'(x), y''(x)$'in ifadelerini (13) denkleminde yazıp belirsiz katsayılar yöntemiyle $r$ ve $c_k$'lar için sırasıyla belirleyici denklem ve tekrarlama formülleri bulunur. Sonra da belirleyici denklemin $r_1$ ve $r_2$ kökleri bulunur;

**2. Aşama** $r_1$'i tekrarlama formülünde yazarak $c_k^{(1)}$'ler belirlenir ve

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} x^{r_1+k}$$

çözümü bulunur;

**3. Aşama**

**(a)** $r_1 - r_2$ tamsayı olmadığında, tekrarlama formüllerinde $r_2$'yi yazarak $c_k^{(2)}$'ler belirlenir ve

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} x^{r_2+k}$$

çözümü bulunur;

**(b)** $r_1 = r_2$ olduğunda, ikinci çözüm,

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r_1+k} + y_1(x) \ln x$$

olarak belirlenir. Burada $a_k$'lar $y_2(x)$'in (13) denkleminde yazılmasıyla belirlenir;

**(c)** $r_1 - r_2 = n$ pozitif tamsayı olduğunda, ikinci çözüm

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r_2+k} + C y_1(x) \ln x$$

olarak belirlenir. Burada da $C$ ve $a_k$'lar, $y_2(x)$'in (13) denkleminde yazılmasıyla belirlenir.

**Uyarı 3** Tekrarlama formülünden $c_k^{(1)}$ ve $c_k^{(2)}$'ler belirlenirken, $c_0^{(1)}$ ve $c_0^{(2)}$ sayıları (genelde sıfırdan farklı ilk katsayılar) keyfi $C_1$ ve $C_2$ sabitlerinin yerine kabul edilebilir. O zaman (13) denkleminin genel çözümü,

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

şeklinde yazılır.

**Uyarı 4** Frobenius yönteminin uygulanmasından görüldüğü gibi, (13) denkleminin belirleyici denklemi,

$$L_2 y = L_2 x^r = (x^r)'' + p(x)(x^r)' + q(x)x^r$$

ifadesindeki $x$'in en küçük kuvvetinin katsayısını sıfıra eşitlemekle elde edilir. Örneğin,

$$y'' + \frac{2}{x} y' + \frac{x+1}{x^2} y = 0$$

denkleminin belirleyici denklemi,

$$x^2(x^r)'' + 2x(x^r)' + (x+1)x^r = r(r-1)x^r + 2rx^r + x^{r+1} + x^r$$

ifadesindeki $x$'in en küçük kuvvetinin $(x^r)$ katsayısı $r^2 + r + 1$ olduğu için, $r^2 + r + 1 = 0$'dır.

**Uyarı 5** Belirleyici denklemin kökleri karmaşık sayılar olduğunda, (16) eşitliğinde $x^r$ yerine $|x^r|$ alınır.

**Uyarı 6** (13) denkleminin düzgün tekil noktası $x = x_0$ olduğunda, denklemin çözümü

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^{r+k}$$

şeklinde aranır ve benzer işlemler yapılır.

Örnek olarak açıklanan yöntemi Bessel[1] denklemi adı verilen denkleme uygulayalım.

### 4.3.4 Bessel Denklemi ve Bessel Fonksiyonları

Matematiksel fiziğin çok sayıda problemi, *Bessel denklemi* diye adlandırılan,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \qquad (0 < x < \infty) \tag{21}$$

denklemine getirilir. Burada $p$, negatif olmayan gerçel bir parametredir.

Şimdi, $x = 0$'ın Bessel denklemi için düzgün tekil nokta olduğunu göz önüne alıp denklemi Frobenius yöntemiyle çözelim. Bunun için önce Uyarı 4'e dayanarak, belirleyici denklemi yazıp köklerini bulalım.

$$L_2 x^r = x^2(x^r)'' + x(x^r)' + (x^2 - p^2)x^r = (r^2 - p^2)x^r + x^{r+2}$$

olduğundan, belirleyici denklem

$$r^2 - p^2 = 0$$

---

[1] Friderich Wilhelm Bessel (1784-1846) – Alman matematikçi ve gökbilimci.

kökleri ise $r = \pm p$ olur.

Önce, $r = p\,(> 0)$ alıp çözümü

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{p+k} \tag{22}$$

şeklinde arayalım. $y(x), y'(x)$ ve $y''(x)$'in ifadelerini (21) denkleminde yazarsak,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(p+k)(p+k-1)c_k x^{p+k} + \sum_{k=0}^{\infty}(p+k)c_k x^{p+k} + (x^2 - p^2)\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{p+k} = 0$$

veya

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(p+k)^2 - p^2\right]c_k x^{p+k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{p+k+2} = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Eşitliğin sol tarafındaki birinci toplamda $k = 0$ ve $k = 1$ durumlarını ayırırsak,

$$(2p+1)c_1 x^{p+1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[(p+k)^2 - p^2\right]c_k x^{p+k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{p+k+2} = 0$$

olur ($c_0$'ın katsayısı sıfır olduğundan). Sağ taraftaki ikinci sonsuz toplamı $\sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} x^{p+k}$ şekline dönüştürürsek, son eşitlik,

$$(2p+1)c_1 x^{p+1} + \sum_{k=2}^{\infty}(2pk + k^2)c_k x^{p+k} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} x^{p+k} = 0$$

veya

$$(2p+1)c_1 x^{p+1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[k(2p+k)c_k + c_{k-2}\right]x^{p+k} = 0$$

biçimini alır. Buradan, belirsiz katsayılar yöntemiyle,

$$(2p+1)c_1 = 0 \tag{23}$$

$$k(2p+k)c_k = -c_{k-2} \qquad (k = \overline{2,\infty}) \tag{24}$$

eşitliklerini elde ederiz. $2p + 1 \neq 0$ olduğundan, (23) eşitliğine göre $c_1 = 0$ olur ve (24) eşitliklerindeki tek göstergeli bütün katsayıların sıfır olduğu, yani $c_{2k+1} = 0$ $(k = \overline{1,\infty})$ sonucuna varılır. Çift göstergeli katsayılar $(c_{2k})$ içinse, yine (24) eşitliğinden,

$$c_{2k} = -\frac{c_{2k-2}}{2k(2p+2k)} \quad (k = \overline{1,\infty})$$

eşitliklerini elde ederiz. Burada $c_0 = 1$ kabul edip diğer katsayıları ardarda,

$$c_2 = -\frac{1}{2(2p+2)}, \quad c_4 = \frac{1}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)}, \ldots,$$

$$c_{2n} = \frac{(-1)^k}{2\cdot 4\cdots(2k)\cdot(2p+2)(2p+4)\cdots(2p+2k)}, \ldots$$

veya

$$c_2 = -\frac{1}{2^2(p+1)}, \quad c_4 = \frac{1}{2^4\cdot 2!(p+1)(p+2)}, \ldots,$$

$$c_{2n} = \frac{(-1)^k}{2^{2n}k!(p+1)(p+2)\cdots(p+k)}, \ldots$$

olarak buluruz.

Bulunan katsayıları (22) eşitliğinde yazarsak, $r = p$ için çözüm (özel)

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(p+1)(p+2)\cdots(p+k)} x^{p+2k} \tag{25}$$

şeklinde bulunur.

İkinci özel çözümü bulmak için, $p$'nin tamsayı olmadığı durumda, (25) eşitliğinde biçimsel olarak $p$ yerine $-p$ yazmak yeterlidir:

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(-p+1)(-p+2)\cdots(-p+k)} x^{-p+2k} \quad (p \notin N) \tag{26}$$

(25) serisinin tüm $x$'ler, (26) serisinin ise $\forall x \neq 0$ için yakınsaklığı, iki kere terim terim diferansiyellenebilirliği, (21) denklemini sağladığı ve $y_1(x)$, $y_2(x)$ fonksiyonlarının doğrusal bağımsızlığı kolaylıkla gösterilebilir.

Söylenenleri göz önüne alırsak, tam olmayan $p$'ler için (21) denkleminin genel çözümü,

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{27}$$

şeklinde yazılabilir.

$y_1(x)$ fonksiyonunun $\dfrac{1}{2^p\Gamma(p+1)}$ ile çarpımına *$p$ dereceden birinci tür*, $y_2(x)$'in $\dfrac{1}{2^{-p}\Gamma(-p+1)}$ ile çarpımına ise *$p$ dereceden birinci tür Bessel fonksiyonları* denir ve sırasıyla $J_p(x)$, $J_{-p}(x)$ ile gösterilir ($\Gamma(x)$ fonksiyonuyla ilgili olarak bkz. Bölüm 5.3):

$$J_p(x) = \frac{1}{2^p\Gamma(p+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(p+1)(p+2)\cdots(p+k)}x^{p+2k}$$

$$J_{-p}(x) = \frac{1}{2^{-p}\Gamma(-p+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(-p+1)(-p+2)\cdots(-p+k)}x^{-p+2k}$$

Burada, $\Gamma(x)$ fonksiyonunun $\forall p$ için $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ özelliğine göre,

$$\Gamma(p+1)(p+1)(p+2)\cdots(p+k) = \Gamma(p+2)(p+2)\cdots(p+k) = \cdots = \Gamma(p+k+1)$$

$$\Gamma(-p+1)(-p+1)(-p+2)\cdots(-p+k) = \Gamma(-p+2)(-p+2)\cdots(-p+k) = \ldots = \Gamma(-p+k+1)$$

ve $\forall k \in N$ için $\Gamma(k+1) = k!$ olduğunu göz önüne alırsak, $J_p(x)$ ve $J_{-p}(x)$ fonksiyonları, sırasıyla

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(p+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k} \tag{28}$$

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2k} \tag{29}$$

şeklini alır.

Bessel fonksiyonlarının yardımıyla Bessel denkleminin genel çözümü

$$y(x) = C_1J_p(x) + C_2J_{-p}(x)$$

şeklinde yazılabilir.

Özel $p = 1/2$ durumunda,

$$\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi},\ \Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}{2^k}\sqrt{\pi}$$

olduğunu (bkz. Bölüm 5.3) göz önüne alıp (28) ve (29) eşitliklerinde gerekli işlemler yapıldığında, sırasıyla

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

elde edilir $(x > 0)$.

$p = n \in N$ olduğunda,

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \qquad \left(n = 0 \text{ için} \quad J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\right) \tag{28*}$$

olacağı (28) eşitliğinden ve $\Gamma(k+1) = k!$ özelliğinden görülmektedir. Bu durumda, (24) eşitlikleri uygulanamadığından, ikinci özel çözüm $(Y_n(x))$, Frobenius kuralının **b** ve **c** seçeneklerine göre belirlenir:

$$Y_n(x) = J_n(x)\ln x + x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{30}$$

Burada $a_k$'lar $(k = \overline{0,\infty})$ yine belirsiz katsayılar yöntemiyle bulunur.

$Y_n(x)$'lere *n dereceden ikinci tür Bessel fonksiyonları* denir. $Y_n(x)$ fonksiyonları için

$$Y_n(x) = \lim_{p\to n}\frac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi}$$

eşitliğinin doğruluğu ispatlanabilir.

Böylece, $p = n \in N$ durumunda Bessel denkleminin genel çözümü,

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x) \tag{31}$$

olarak yazılabilir.

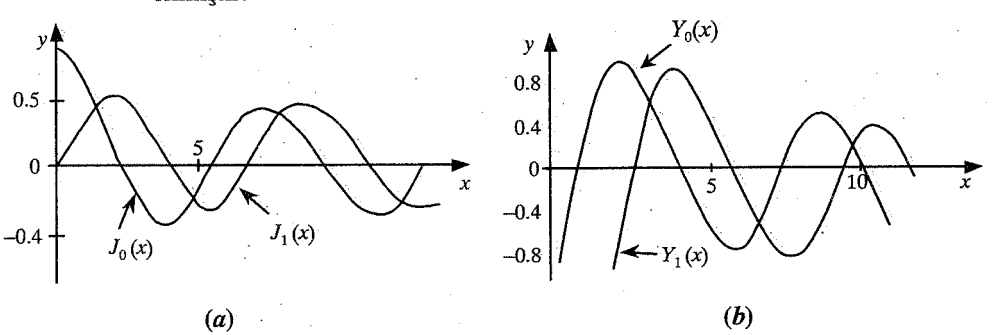
**Uyarı 7** (31) eşitliğiyle belirlenen $y(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasının civarında sınırsızdır. Bu nedenle, sözü edilen civarda Bessel denkleminin sınırlı çözümü arandığında, (31) eşitliğinde $C_2 = 0$ kabul edilir.

Özel $n = 0$ değerinde $Y_0(x)$ fonksiyonunun,

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\right]$$

şeklinde olacağı gösterilebilir. Burada $C \approx 0.577$ olup *Euler sabiti* diye adlandırılır.

$J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$ ve $Y_1(x)$ fonksiyonlarının grafikleri Şekil 23'te verilmiştir.




**ŞEKİL 23**

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 4.3 için)

1. Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini ardarda diferansiyelleme yöntemiyle çözün.

   (a) $y' = x + y,\ y(0) = 1$ (b) $y' = xy + 1,\ y(0) = 0$

   (c) $y'' = xy,\ y(0) = 1\ y'(0) = 0$ (d) $y'' = x^2 + y,\ y(0) = 0, y'(0) = 1$

   (e) $y'' = xy' - y,\ y(0) = 1\ y'(0) = 0$

2. Ardarda diferansiyelleme yöntemiyle aşağıdaki diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini bulun.

   (a) $y'' = -xy' - y$ (b) $y'' = xy + 2y$

3. Ardarda diferansiyelleme yöntemiyle aşağıdaki başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin ilk $k$ sayıda terimini bulun.

   (a) $y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 1,\ k = 5$

   (b) $y' = x^2y + y^3,\ y(0) = 1,\ k = 4$

   (c) $y' = \cos(x + y),\ y(0) = 0,\ k = 6$

   (d) $y' = \sqrt{x^2 + y^2},\ y(0) = 1,\ k = 4$

   (e) $y' = e^y + x^2,\ y(1) = 0,\ k = 5$

   (f) $y' = x \ln y,\ y(1) = 1,\ k = 4$

   (g) $y'' = x + y^2,\ y(0) = 0, y'(0) = 1,\ k = 5$

   (h) $y'' = xy^2,\ y(0) = y'(0) = 1,\ k = 5$

   (i) $y'' = e^{-x^2} - xy',\ y(0) = 1, y'(0) = 0,\ k = 5$

   (j) $y'' = yy' - x^2,\ y(0) = y'(0) = 0,\ k = 6$

   (k) $\begin{cases} y' = xy + z, & y(0) = 0 \\ z' = y - z, & z(0) = 1 \end{cases} \quad k = 5$

   (l) $\begin{cases} y' = xz, & y(0) = -1 \\ z' = x + y^2, & z(0) = 1 \end{cases} \quad k = 5$

4. Belirsiz katsayılar yöntemiyle aşağıdaki başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin ilk $k$ sayıda terimini bulun.

(a) $y' = 1 - 2xy,\ y(0) = 1,\ k = 5$

(b) $y' = x + y^2,\ y(0) = 1,\ k = 4$

(c) $y'' = 2xy,\ y(0) = y(0) = 1,\ k = 7$

(d) $y'' = y\cos x + x,\ y(0) = 1, y'(0) = 0,\ k = 7$

(e) $y'' = (2x - 1)y - 1,\ y(0) = 0, y'(0) = 1,\ k = 5$

5. Belirsiz katsayılar yöntemiyle aşağıdaki problemlerin kesin çözümlerini bulun.

(a) $y' = 2x - y,\ y(0) = 2$

(b) $y' = 3x + x^3y,\ y(0) = 4$

(c) $y' = xy + x + 1,\ y(0) = 0$

(d) $(1 + x^2)y'' + 2xy^1 = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

(e) $y'' = 2xy' + 4y,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

(f) $y'' = 2xy,\ y(0) = y_0,\ y'(0) = 0$

(g) $y'' = axy,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y'(0) = y_0'$

(h) $y'' = xy' + 2y + e^{-x^2},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1/2$

(i) $y'' = -xy' - y,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

(j) $y'' = xyy',\ y(0) = y'(0) = 1$

6. Frobenius yönteminin yardımıyla aşağıdaki denklemlerin genel çözümlerini bulun.

(a) $xy' - 2y = 0$

(b) $xy'' - y' = 0$

(c) $xy'' + 2y' + xy = 0$

(d) $xy'' + 2y' - xy = 0$

(e) $4xy'' + 2y' + y = 0$

(f) $4xy'' + 2y' - y = 0$

(g) $xy'' + 3y' + x^2y = 0$

(h) $xy'' + 3y' - x^2y = 0$

7. Alıştırma 6'nın **c** ve **d**, **e** ve **f**, dolayısıyla **g** ve **h** seçeneklerindeki denklemlerin ve yanıtlarının işaret farklarına dikkat edin ve bu tür özelliklerin, yani yanıtların $(-1)^k$ işaretiyle farklılığının genel şeklini inceleyin.

8. Aşağıdaki Bessel denklemlerinin genel çözümlerini bulun.

(a) $xy'' + y' - 4xy = 0$ (b) $x^2y'' + y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$

(c) $x^2y'' + y' + \left(x^2 - \frac{4}{9}\right)y = 0$ (d) $x^2y'' + y' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$

## BÖLÜM 4 İÇİN ÇEŞİTLİ ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini Euler yöntemiyle çözün.

   (a) $y' = \dfrac{y - x}{y + x}$, $y(0) = 1, h = 0.1, n = 5$

   (b) $y' = xy$, $y(1) = 1, h = 0.1, n = 5$

   (c) $y' = 1 + x + y^2$, $y(0) = 1, h = 0.1, n = 4$

   (d) $y' = \dfrac{(x + y)(1 - xy)}{x + 2y}$, $y(0) = 1, h = 0.2, n = 5$

2. Euler ve Runge-Kutta yöntemlerini kullanarak aşağıdaki başlangıç değer problemlerini $10^{-4}$ kesinlikle çözün.

   (a) $y' = y^2 - x^2$, $y(1) = 1$, $[1, 2]$

   (b) $y' = x^2 - xy + y^2$, $y(0) = 0.1$, $[0, 1]$

   (c) $y' = x^3 - y$, $y(1) = -1$, $[1, 2]$

   (d) $y' = x^3 + y^2$, $y(0) = 0.5$, $[0, 0.5]$

3. Aşağıdaki başlangıç değer problemlerinin yaklaşık çözümlerini $10^{-3}$ kesinlikle Euler yöntemiyle bulun.

   (a) $y(1) = 0, z(1) = \frac{1}{3}$, $[1, 2]$

   (b) $\begin{cases} y' = \cos(y + 2z) + 2 \\ z' = \dfrac{2}{x + 2y^2} + x + 1 \end{cases}$ $y(0) = 1, z(0) = 0.05$, $[0, 0.3]$

   (c) $y'' = y + e^x$, $y(0) = 0, y'(0) = 0.5$, $[0, 1]$

   (d) $y'' = 2y' + x^2 - 1$, $y(1) = -\frac{1}{6}, y'(1) = -\frac{3}{4}$, $[1, 2]$

4. Ardarda diferansiyelleme yöntemiyle aşağıdaki başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin ilk $k$ sayıda terimini bulun.

(a) $y' = 1 + x + y^2, y(0) = 1, k = 6$

(b) $y' = x^2 + y^2,\ y(1) = 2,\ k = 5$

(c) $y' = 2e^x y^2 - 3\cos x,\ y(0) = 1,\ k = 5$

(d) $y'' = 3x^2 y - 3\cos x^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ k = 5$

(e) $y'' = 2y' \ln y + x^2 + 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3,\ k = 5$

5. Belirsiz katsayılar yöntemiyle aşağıdaki problemleri çözün ve bulunan serilerin yakınsaklık bölgelerini bulun.

(a) $y' = 2y + x - 1,\ y(1) = y_0$

(b) $(1 - x)y' = 1 + x - y,\ y(0) = 0$

(c) $y' = 2(x - 1)^2 y,\ y(1) = 4$

(d) $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

# BÖLÜM 5

# Laplace Dönüşümü ve Uygulamaları

## 5.1 LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ TANIMI VE ÖZELLİKLERİ

$f(t)$, $[0,\infty)$ aralığında tanımlı herhangi fonksiyon, $s$ ise genelde karmaşık değerler alabilen parametre olsun.

**Tanım 1** $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ özel olmayan integraline $f(t)$ fonksiyonunun *Laplace*[1] *dönüşümü* denir ve $Lf(t)$ ile gösterilir:

$$Lf(t) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{1}$$

Görüldüğü gibi, $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü, özel olmayan integral olup $s$ parametresine bağlı bir fonksiyondur (eğer özel olmayan integral yakınsaksa. I, bkz. Bölüm 7.6). Bu dönüşümün özelliklerini incelemeden önce, $f(t)$ ve $s$'e bağlı olarak, $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ özel olmayan integralinin yakınsaklığını belirleyen aşağıdaki tanımı ve teoremi verelim.

**Tanım 2** $[T,\infty)$ aralığında $(T \geq 0)$,

$$|f(t)| \leq Me^{rt} \tag{2}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $M > 0$ ve $r \geq 0$ gerçel sayıları varsa, o zaman $f(t)$ fonksiyonuna, sözü edilen aralıkta $r$ *dereceden sınırlı fonksiyon* denir.

Örneğin, $[0,\infty)$ aralığında, $C(sb)$, $\sin \beta t$, $\cos \beta t$ $(\beta \in R)$ fonksiyonları sıfır dereceden, $t^n$ $(n \in N)$ fonksiyonu $\forall r (> 0)$ dereceden, $e^{\alpha t}$ fonksiyonu $\alpha$ dereceden sınırlı, $e^{t^2}, e^{t^2} \cos t, e^{t^3} \sin t$ fonksiyonları ise sınırsız (sınırlı olmayan) fonksiyonlardır vb.

**TEOREM 1** $f(t)$, $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli[2] ve $r$ dereceden sınırlı fonksiyon ise, o zaman $\mathrm{Re}(s) > r$ eşitsizliğini sağlayan bütün $s$'ler için (1) integrali yakınsaktır, yani $Lf(t)$ Laplace dönüşümü vardır.

[1] Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827) – Fransız matematikçi.

❒ $s = p + iq$, yani $\mathrm{Re}(s) = p$ olsun (bkz. 1, Bölüm 1.2). O zaman (2) eşitsizliğini, Euler formülünü (bkz. 2, Bölüm 8.14) ve $\left|e^{-st}\right| = \left|e^{-pt} \cdot e^{-iqt}\right| = e^{-pt}\left|e^{-iqt}\right| = e^{-pt}$ ($\left|e^{-iqt}\right| = \left|\cos qt - i \sin qt\right| = 1$ olduğundan) olduğunu göz önüne alırsak,

$$\left|Lf(t)\right| = \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right| \le \int_0^\infty \left|e^{-st}\right| \cdot \left|f(t)\right| dt \le M \int_0^\infty e^{-(p-r)t} dt = M \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-(p-r)t} dt =$$

$$-\frac{M}{p-r} \lim_{T\to\infty} e^{-(p-r)t}\Big|_0^T = -\frac{M}{p-r}(\lim_{T\to\infty} e^{-(p-r)T} - 1) = \frac{M}{p-r}$$

olur. Yani (1) integrali yakınsaktır. ❒

(1) integralinin yakınsaklığı durumunda, $f(t)$'nin Laplace dönüşümünü $F(s)$ ile gösterelim:

$$Lf(t) = F(s) \quad \text{veya} \quad F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{3}$$

$F(s)$ fonksiyonuna $f(t)$'nin *görüntüsü*, $f(t)$'ye ise $F(s)$'nin *başlangıç fonksiyonu* veya *ters Laplace dönüşümü* ($L^{-1}F(s) = f(t)$) denir.

Bundan sonra, $F(s)$'nin $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü olmasını,

$$Lf(t) = F(s), \quad F(s) :\to f(t); \quad f(t) \leftarrow: F(s), \quad L^{-1}F(s) = f(t)$$

işaretlerinden herhangi biriyle göstereceğiz.

Teorem 1'in koşulları sağlandığında:

1. *$F(s)$ fonksiyonunun keyfi mertebeden türevi vardır;*
2. $\lim\limits_{\mathrm{Re}\, s\to\infty} F(s) = 0$ 'dır;
3. *$F(s)$ fonksiyonu, $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ olmak üzere iki tane fonksiyonun görüntüsü ise, o zaman tüm süreklilik noktalarında $f_1(t) \equiv f_2(t)$ özdeşliği sağlanır* önermeleri de doğrudur. Bunların doğruluğunu kabul edelim.

Laplace dönüşümünün tanımından görüldüğü gibi, $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ fonksiyonları Teorem 1'in koşullarını sağlıyorsa, o zaman keyfi $C_1$ ve $C_2$ sabitleri için,

$$L[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] = C_1 Lf_1(t) + C_2 Lf_2(t) \tag{4}$$

---

[2] $f(t)$, $[0,\infty)$ aralığının içerdiği her $[a,b]$ kapalı aralığında parçalı sürekli fonksiyon (bkz. 1, Bölüm 2.15) ise, o zaman buna $[0,\infty)$'da *parçalı sürekli fonksiyon* denir.

eşitliği doğrudur.

(4) eşitliğine, *Laplace dönüşümünün doğrusallık özelliği* denir.

*Bundan sonra, görüntüsü bulunan bütün fonksiyonların Teorem 1'in koşullarını sağladığını varsayacak ve tekrardan kaçınmak için bunu söylemekten vazgeçeceğiz.*

*Ters Laplace dönüşümünün de doğrusallık özelliğine sahip olduğu açıktır:*

$$L^{-1}[C_1F_1(s)+C_2F_2(s)]=C_1L^{-1}F_1(s)+C_2L^{-1}F_2(s)$$

**TEOREM 2** **(benzerlik özelliği)** $f(t) \leftarrow: F(s)$ ise, o zaman, keyfi $a>0$ sayısı için,

$$f(at) \leftarrow: \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \tag{5}$$

dönüşümü doğrudur.

❒ Laplace dönümünün tanımına göre,

$$Lf(at)=\int_0^\infty e^{-st}f(at)dt$$

olacağı açıktır. Sağ taraftaki integralde $at=\tau$ kabul edersek ($t=\frac{\tau}{a}$, $dt=\frac{1}{a}d\tau$, $t=0 \Rightarrow \tau=0$, $t=\infty \Rightarrow \tau=\infty$),

$$\int_0^\infty e^{-st}f(at)dt=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-s\tau/a}f(\tau)d\tau=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

olduğunu, yani (5) formülünü elde ederiz. ❑

**TEOREM 3** **(kayma özelliği)** $f(t) \leftarrow: F(s)$ ise, o zaman, keyfi $s_0$ karmaşık sayısı için, $\mathrm{Re}(s-s_0)>0$ olduğunda,

$$e^{s_0t}f(t) \leftarrow: F(s-s_0) \qquad \text{yani,} \qquad Le^{s_0t}f(t)=F(s-s_0) \tag{6}$$

formülü doğrudur.

❒ Gerçekten de, Laplace dönümünün tanımına göre,

$$Le^{s_0t}f(t)=\int_0^\infty e^{-st}e^{s_0t}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}f(t)dt=F(s-s_0)$$

olduğu açıktır. ❑

*Biz Laplace dönüşümünü yalnız diferansiyel ve integral denklemlerin çözümüne uygulayacağımız için, s parametresinin gerçel olması yeterlidir. Bu nedenle, bundan sonra, s 'nin ve kullanacağımız diğer bağımsız değişkenlerin yalnız gerçel değerler aldığını düşüneceğiz.*

Şimdi, Laplace dönümünün tanımına ve özelliklerine dayanarak, kimi fonksiyonların görüntüsünü bulalım (burada ve ileride, kullanacağımız tüm fonksiyonların $[0,\infty)$ aralığında ele alındığını kabul edeceğiz).

1. $f(t)=1$ $(r=0)$. $s>0$ olduğunda,

$$Lf(t)=L1=\int_0^\infty e^{-st}\cdot 1dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}dt=-\frac{1}{s}\lim_{T\to\infty}e^{-st}\Big|_0^T=\frac{1}{s}$$

olur. Yani,

$$L1=\frac{1}{s}\qquad \text{veya}\qquad 1\leftarrow:\frac{1}{s} \tag{7}$$

formülü doğrudur.

2. $f(t)=e^{\alpha t}$ $(\alpha\in R)$ . (7) formülünü ve kayma özelliğini kullanarak,

$$Le^{\alpha t}=L(e^{\alpha t}\cdot 1)=\frac{1}{s-\alpha}$$

elde ederiz $(s-\alpha>0)$. Yani,

$$Le^{\alpha t}=\frac{1}{s-\alpha}\qquad \text{veya}\qquad e^{\alpha t}\leftarrow:\frac{1}{s-\alpha}\qquad (s-\alpha>0) \tag{8}$$

formülü doğrudur.

3. $f(t)=\cos\beta t$ $(\beta\in \mathrm{R})$. $\cos\beta t=\frac{1}{2}(e^{i\beta t}+e^{-i\beta t})$ olduğundan, doğrusallık özelliğine ve (8) formülüne göre,

$$L\cos\beta t=\frac{1}{2}L(e^{i\beta t}+e^{-i\beta t})=\frac{1}{2}(Le^{i\beta t}+Le^{-i\beta t})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\beta}+\frac{1}{s+i\beta}\right)$$

$$=\frac{s}{s^2+\beta^2}$$

yani,

$$L\cos\beta t=\frac{s}{s^2+\beta^2}\qquad \text{veya}\qquad \cos\beta t\leftarrow:\frac{s}{s^2+\beta^2}\qquad (s>0) \tag{9}$$

olur.

4. $f(t)=\sin\beta t$ $(\beta\in R)$. $\sin\beta t=\frac{1}{2i}(e^{i\beta t}-e^{-i\beta t})$ olduğundan, benzer yolla,

$$L\sin\beta t = \frac{\beta}{s^2+\beta^2} \quad \text{veya} \quad \sin\beta t \leftarrow: \frac{\beta}{s^2+\beta^2} \quad (s>0) \tag{10}$$

elde ederiz.

5. $f(t) = \cosh\beta t$ $(\beta \in R)$. $\cosh\beta t = \frac{1}{2}(e^{\beta t} + e^{-\beta t})$ olduğunu göz önüne alırsak (bkz. 1, Bölüm 1.14),

$$L\cosh\beta t = \frac{1}{2}(Le^{\beta t} + Le^{-\beta t}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\beta} + \frac{1}{s+\beta}\right) = \frac{s}{s^2-\beta^2}$$

yani,

$$L\cosh\beta t = \frac{s}{s^2-\beta^2} \quad \text{veya} \quad \cosh\beta t \leftarrow: \frac{s}{s^2-\beta^2} \quad (s>|\beta|) \tag{11}$$

olur.

6. $f(t) = \sinh\beta t$ $(\beta \in R)$. $\sinh\beta t = \frac{1}{2}(e^{\beta t} - e^{-\beta t})$ olduğundan, benzer yolla,

$$L\sinh\beta t = \frac{\beta}{s^2-\beta^2} \quad \text{veya} \quad \sinh\beta t \leftarrow: \frac{\beta}{s^2-\beta^2} \quad (s>|\beta|) \tag{12}$$

elde edilir.

Elde edilen formüllerden ve kayma özelliğinden, aşağıdaki dönüşüm formüllerinin de doğruluğu görülmektedir.

$$Le^{\alpha t}\cos\beta t = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \quad \text{veya} \quad e^{\alpha t}\cos\beta t \leftarrow: \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \tag{13}$$

$$Le^{\alpha t}\sin\beta t = \frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \quad \text{veya} \quad e^{\alpha t}\sin\beta t \leftarrow: \frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \tag{14}$$

$$Le^{\alpha t}\cosh\beta t = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2-\beta^2} \quad \text{veya} \quad e^{\alpha t}\cosh\beta t \leftarrow: \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2-\beta^2} \tag{15}$$

$$Le^{\alpha t}\sinh\beta t = \frac{\beta}{(s-\alpha)^2-\beta^2} \quad \text{veya} \quad e^{\alpha t}\sinh\beta t \leftarrow: \frac{\beta}{(s-\alpha)^2-\beta^2} \tag{16}$$

---

**ÖRNEK 1** Aşağıdaki fonksiyonların görüntülerini bulun.

**(a)** 4 **(b)** $-5$ **(c)** $1+3e^{-2t}$

**(d)** $3\sin 2t - 5\cos 3t$ **(e)** $e^{3t}\sin 2t + 3e^{-t}\cosh 0.5t$

(f) $f(t)=\begin{cases}3, & 0\le t<2\\ 0, & 2\le t\end{cases}$ (g) $f(t)=\begin{cases}\cos 2t, & 0\le t<\pi\\ 0, & \pi\le t\end{cases}$

(h) $f(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<\pi/2\\ 3\sin 4t, & \pi/2\le t\end{cases}$ (i) $\sin^2 3t$ (j) $\sin 2t\cos 3t$

(k) $\sin^3 t$ (l) $\cos^4 t$ (m) $\cosh\gamma t\cos\beta t$

○ Çözümlerde Laplace dönüşümünün tanımını, özelliklerini ve yukarıda açıklananları gerektiği şekilde kullanalım.

(a) $L4=L4\cdot 1=4L1=4\cdot\frac{1}{s}=\frac{4}{s}$

(b) $L(-5)=-5L1=-\frac{5}{s}$

(c) $L(1+3e^{-2t})=L1+3Le^{-2t}=\frac{1}{s}+\frac{3}{s+2}$

(d) $L(3\sin 2t-5\cos 3t)=3L\sin 2t-5L\cos 3t=\frac{6}{s^2+4}-\frac{5s}{s^2+9}$

(e) $L(e^{3t}\sin 2t+3e^{-t}\cosh 0.5t)=Le^{3t}\sin 2t+3Le^{-t}\cosh 0.5t$

$$=\frac{2}{(s-3)^2+4}+\frac{3(s+1)}{(s+1)^2-0.25}$$

(f) $Lf(t)=\int_0^2 e^{-st}\cdot 3dt+\int_2^\infty e^{-st}\cdot 0dt=-3\cdot\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^2=\frac{3}{s}(1-e^{-2s})$

(g) $Lf(t)=\int_0^\pi e^{-st}\cos 2tdt=\frac{e^{-st}}{s^2+4}(2\sin 2t-s\cos 2t)\Big|_0^\pi=\frac{s}{s^2+4}(1-e^{-\pi s})$

(bkz. 1, Bölüm 5.4);

(h) $Lf(t)=3\int_{\pi/2}^\infty e^{-st}\sin 4tdt=3\lim_{T\to\infty}\frac{e^{-st}}{s^2+16}(-s\sin 4t-4\cos 4t)\Big|_{\pi/2}^T$

$=\frac{12e^{-\pi s/2}}{s^2+16}$ (bkz. 1, Bölüm 5.4 ve 7.6);

(i) $\sin^2 3t=\frac{1}{2}(1-\cos 6t)$ olduğunu göz önüne alırsak,

$$L\sin^2 3t=\frac{1}{2}(L1-L\cos 6t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+36}\right)=\frac{18}{s(s^2+36)}$$

olarak buluruz;

(j) $\sin 2t\cos 3t=\frac{1}{2}(\sin 5t-\sin t)$ olduğundan,

$$L\sin 2t\cos 3t = \frac{1}{2}(L\sin 5t - L\sin t) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{s^2+25} - \frac{1}{s^2+1}\right)$$

yazabiliriz;

**(k)** $\sin^3 t = \sin t \sin^2 t = \frac{1}{2}\sin t(1-\cos 2t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}(\sin 3t - \sin t)$

$= \frac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t)$ olduğundan,

$$L\sin^3 t = \frac{1}{4}(3L\sin t - L\sin 3t) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+9}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+9}\right) = \frac{6}{(s^2+1)(s^2+9)}$$

olur;

**(l)** $\cos^4 t = (\cos^2 t)^2 = \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right]^2 = \frac{1}{4}(1+2\cos 2t+\cos^2 2t)$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2t + \frac{1}{2}\cos 4t\right) = \frac{1}{8}(3+4\cos 2t+\cos 4t)$ olduğundan,

$$L\cos^4 t = \frac{1}{8}(L3 + 4L\cos 2t + L\cos 4t) = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{s} + \frac{4s}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+16}\right)$$

olur.

**(m)** $\cosh \gamma t = \frac{1}{2}(e^{\gamma t} + e^{-\gamma t})$ olduğunu göz önüne alırsak,

$$L\cosh \gamma t \cos \beta t = \frac{1}{2}Le^{\gamma t}\cos \beta t + \frac{1}{2}Le^{-\gamma t}\cos \beta t =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{s-\gamma}{(s-\gamma)^2+\beta^2} + \frac{s+\gamma}{(s+\gamma)^2+\beta^2}\right]$$

olur. ○

---

Yukarıda elde edilen (7) – (16) formüllerinin yardımıyla, görüntüsü verilen başlangıç fonksiyonunun kendisi de bulunabilir.

---

**ÖRNEK 2** Aşağıdaki fonksiyonların ters Laplace dönüşümünü bulun.

**(a)** $\frac{2}{s}$ **(b)** $\frac{4}{s^2+3}$ **(c)** $\frac{2s+3}{s^2+9}$ **(d)** $\frac{5s-6}{(s+1)^2+4}$

**(e)** $\frac{3s-2}{s^2+4s+3}$ **(f)** $\frac{3s+4}{(s+1)(s^2+25)}$ **(g)** $\frac{2s^2-4s+3}{(s-2)(s^2-1)}$

○ (7) – (16) formüllerinden ve ters Laplace dönüşümünün doğrusallığından gerektiği şekilde yararlanıp aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

**(a)** $\frac{1}{s} :\!\rightarrow 1$ olduğundan, $\frac{2}{s} :\!\rightarrow 2$ olur;

**(b)** $\frac{4}{s^2+3} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{s^2+(\sqrt{3})^2}$ şeklinde yazılabildiğinden, $\frac{4}{s^2+3} :\!\rightarrow$ $\frac{4\sqrt{3}}{3} \sin \sqrt{3}t$ olur;

**(c)** Verilen kesri,

$$\frac{2s+3}{s^2+9} = 2 \cdot \frac{s}{s^2+9} + \frac{3}{s^2+9}$$

şeklinde düzenleyip,

$$\frac{2s+3}{s^2+9} :\!\rightarrow 2\cos 3t + \sin 3t$$

sonucunu elde ederiz;

**(d)** Verilen kesri, belirli fonksiyonların Laplace dönüşümü olacak şekilde dönüştürüp,

$$\frac{5s-6}{(s+1)^2+4} = \frac{5(s+1)-11}{(s+1)^2+4} = 5 \cdot \frac{s+1}{(s+1)^2+4} - \frac{11}{2} \frac{2}{(s+1)^2+4}$$

biçiminde yazarsak,

$$\frac{5s-6}{(s+1)^2+4} :\!\rightarrow 5e^{-t} \cos 2t - \frac{11}{2} e^{-t} \sin 2t$$

buluruz;

**(e)** Yine verilen kesri dönüştürüp,

$$\frac{3s-2}{s^2+4s+3} = \frac{3(s+2)-8}{(s+2)^2-1} = 3 \cdot \frac{s+2}{(s+2)^2-1} - 8 \cdot \frac{1}{(s+2)^2-1}$$

biçiminde yazarsak, sonuç

$$\frac{3s-2}{s^2+4s+3} :\!\rightarrow 3e^{-2t} \cosh t - 8e^{-2t} \sinh t$$

olarak bulunur;

**(f)** Önce, verilen rasyonel kesri basit kesirlere ayıralım:

$$\frac{3s+4}{(s+1)(s^2+25)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+25}, \quad A = \frac{1}{26}, \quad B = -\frac{1}{26}, \quad C = \frac{79}{26},$$

$$\frac{3s+4}{(s+1)(s^2+25)} = \frac{1}{26}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{26}\frac{s-79}{s^2+25}$$
$$= \frac{1}{26}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{26}\frac{s}{s^2+25} + \frac{79}{130}\frac{5}{s^2+25}$$

Son eşitliğe göre,

$$\frac{3s+4}{(s+1)(s^2+25)} :\rightarrow \frac{1}{26}e^{-t} - \frac{1}{26}\cos 5t + \frac{79}{130}\sin 5t$$

buluruz;

(g) Yine önce, verilen rasyonel kesri basit kesirlere ayıralım:

$$\frac{2s^2-4s+3}{(s-2)(s^2-1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1}, \qquad A = 1, \qquad B = -\frac{1}{2}, \qquad C = \frac{3}{2},$$

$$\frac{2s^2-4s+3}{(s-2)(s^2-1)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{s+1}$$

Buradan da,

$$\frac{2s^2-4s+3}{(s-2)(s^2-1)} :\rightarrow e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t} + \frac{3}{2}e^{-t}$$

buluruz. ○

---

**Uyarı** $f(t)$ ve $\varphi(t)$ başlangıç fonksiyonları için, sonlu sayıda nokta hariç, diğer tüm noktalarda

$$f(t) = \varphi(t)$$

eşitliğini sağladığında,

$$Lf(t) = L\varphi(t)$$

eşitliğinin doğruluğu kolaylıkla gösterilebilir (bkz. 1, Bölüm 4.3). Örneğin,

$$f(t) = 1 + 2\sin 3t + 3e^{-2t} \qquad \text{ve} \qquad \varphi(t) = \begin{cases} f(t) & t \neq 1,2 \\ 0 & t = 1 \\ -2 & t = 2 \end{cases}$$

fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri aynı olup $\frac{1}{s} + \frac{6}{s^2+9} + \frac{3}{s+2}$ şeklindedir.

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 5.1 için)

1. Aşağıdaki fonksiyonların görüntülerini bulun.

(a) $5$ (b) $-7$ (c) $\pi$ (d) $e^{-t}+2\cos\frac{t}{2}$

(e) $\sinh 3t+3e^{t}$ (f) $f(t)=\begin{cases}3\sin 4t, & 0\le t<\pi/4\\ 0, & \pi/4\le t\end{cases}$

(g) $f(t)=\begin{cases}e^{-2t}, & 0\le t<1\\ 1, & 1\le t\end{cases}$ (h) $f(t)=\begin{cases}2\sin 3t, & 0\le t<\pi/3\\ e^{2t}, & \pi/3\le t\end{cases}$

(i) $\cos\alpha t\cos\beta t$ (j) $\sin\alpha t\cos\beta t$ (k) $\sin\alpha t\sin\beta t$ (l) $\cos^3 t$

(m) $\sin^4 t$ (n) $\sinh\gamma t\cos\beta t$ (o) $\sinh\gamma t\sin\beta t$

2. Aşağıdaki fonksiyonların ters Laplace dönüşümlerini bulun.

(a) $-\frac{3}{s}$ (b) $\frac{3}{s+2}$ (c) $\frac{4s-3}{s^2+4}$

(d) $\frac{1}{s^2+4s+5}$ (e) $\frac{1}{s^2+4s+3}$ (f) $\frac{1}{s^2-s+7}$

(g) $\frac{s+2}{(s+1)(s-2)(s^2+4)}$ (h) $\frac{s^2+2s-1}{s^3-2s^2+2s-1}$

(i) $\frac{s^3+3s^2-4s+6}{(s^2+2)(s^2-4)}$

3. Teorem 1'in koşulları sağlandığında $F'(s)$'nin varlığını gösterin.

## 5.2 GÖRÜNTÜLERİN DİFERANSİYELLENMESİ VE İNTEGRALLENMESİ

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \tag{1}$$

verilmiş olsun. Her iki tarafın $s$'ye göre türevini alırsak,

$$F'(s)=\left(\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt\right)'_s=\int_0^\infty\left[e^{-st}f(t)\right]'_s dt=-\int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt$$

yani,

$$-F'(s)=\int_0^\infty e^{-st}[tf(t)]dt \quad \text{veya} \quad -F'(s)=Ltf(t) \text{ veya } tf(t) \leftarrow: -F'(s) \qquad (2)$$

olur.

Demek ki, *görüntünün türevinin* (−1) *ile çapımı, Laplace dönüşümü açısından, başlangıç fonksiyonunun t ile çarpımına denktir.*

Elde edilen sonuca dayanarak, görüntünün keyfi mertebeden türevi için formül bulalım.

$F''(s)=[F'(s)]', F'''(s)=[F''(s)]'$ vb. olduğunu göz önüne alırsak, (2) formülüne göre,

$$-[-F'(s)]'=Lt[tf(t)]$$

yani,

$$(-1)^2F''(s)=Lt^2f(t) \quad \text{veya} \quad (-1)^2F''(s) :\rightarrow t^2f(t)$$

$$-[(-1)^2F''(s)]'=Lt[t^2f(t)]$$

yani,

$$(-1)^3F'''(s)=Lt^3f(t) \quad \text{veya} \quad (-1)^3F'''(s) :\rightarrow t^3f(t)$$

.....

$$(-1)^nF^{(n)}(s)=Lt^nf(t) \quad \text{veya} \quad (-1)^nF^{(n)} :\rightarrow t^nf(t) \qquad (3)$$

olacağı açıktır.

(3) formülüne *görüntünün n. mertebeden türev formülü* denir.

Şimdi, (3) formülüne dayanarak, ileride kullanacağımız kimi fonksiyonların görüntülerini bulalım.

**1.** $Lt^n=?$

(3) formülünde $f(t)\equiv 1$ kabul edersek, $\frac{1}{s} :\rightarrow 1$ olduğundan,

$$Lt^n=(-1)^n\left(\frac{1}{s}\right)^{(n)}=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

yani,

$$Lt^n=\frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{veya} \quad \frac{n!}{s^{n+1}} :\rightarrow t^n \qquad (4)$$

buluruz.

**ÖRNEK 1** $f(t) = 4t^5 - 3t^4 + 5t^3 - 2t^2 + 3t - 1$ fonksiyonunun görüntüsünü bulun.

○ Laplace dönüşümünün doğrusallık özelliğini göz önüne alıp $n = 1, 2, 3, 4, 5$ için (4) formülünü kullanırsak,

$$\begin{aligned} Lf(t) &= L(4t^5 - 3t^4 + 5t^3 - 2t^2 + 3t - 1) \\ &= 4Lt^5 - 3Lt^4 + 5Lt^3 - 2Lt^2 + 3Lt - L1 \\ &= \frac{480}{s^6} - \frac{72}{s^5} + \frac{30}{s^4} - \frac{4}{s^3} + \frac{3}{s^2} - \frac{1}{s} \end{aligned}$$

olur. ○

---

**2.** $Lt^n e^{\alpha t} = ?$

Kayma özelliğini kullanırsak, (4) formülünden,

$$Lt^n e^{\alpha t} = \frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}} \quad \text{veya} \quad \frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}} :\longrightarrow t^n e^{\alpha t} \tag{5}$$

elde ederiz.

**3.** $Lt\cos\beta t = ?$

(2) formülünde $f(t) = \cos\beta t$ kabul edersek,

$$Lt\cos\beta t = -\left(\frac{s}{s^2+\beta^2}\right)' = -\frac{s^2+\beta^2-2s^2}{(s^2+\beta^2)^2} = \frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

yani,

$$Lt\cos\beta t = \frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2} \quad \text{veya} \quad \frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2} :\longrightarrow t\cos\beta t \tag{6}$$

olur;

**4.** $Lt\sin\beta t = ?$

Yukarıdakine benzer yolla,

$$Lt\sin\beta t = \frac{2\beta s}{(s^2+\beta^2)^2} \quad \text{veya} \quad \frac{2\beta s}{(s^2+\beta^2)^2} :\longrightarrow t\sin\beta t \tag{7}$$

bulunur.

Kayma özelliğine göre, (6) ve (7) formüllerinden, sırasıyla

$$Lte^{\alpha t}\cos\beta t = \frac{(s-\alpha)^2-\beta^2}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2} \quad \text{veya} \quad \frac{(s-\alpha)^2-\beta^2}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2} :\longrightarrow te^{\alpha t}\cos\beta t \tag{8}$$

$$Lte^{\alpha t}\sin\beta t = \frac{2\beta(s-\alpha)}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2} \quad \text{veya} \quad \frac{2\beta(s-\alpha)}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2} :\rightarrow te^{\alpha t}\sin\beta t \qquad (9)$$

dönüşüm formülleri elde edilir.

---

**ÖRNEK 2** Aşağıdaki fonksiyonların görüntülerini bulun.

(a) $f(t) = 3t^3e^{2t} - 2t\cos 3t$

(b) $f(t) = 2t\sin 3t + 5te^{3t}\sin t - 3e^t\cosh 4t$

○ (a) (5) formülüne göre ($n = 3$), $Lt^3e^{2t} = \dfrac{3!}{(s-2)^4}$, (6) formülüne göre,

$Lt\cos 3t = \dfrac{s^2-9}{(s^2+9)^2}$ olduğunu göz önüne alırsak,

$$F(s) = 3\cdot\frac{3!}{(s-2)^2} - 2\cdot\frac{s^2-9}{(s^2+9)^2} = \frac{18}{(s-2)^2} - \frac{2(s^2-9)}{(s^2+9)^2}$$

olarak bulunur;

(b) (7) formülüne göre, $Lt\sin 3t = \dfrac{6s}{(s^2+9)^2}$, (9) formülüne göre,

$Lte^{3t}\sin t = \dfrac{2(s-3)}{[(s-3)^2+1]^2} = \dfrac{2(s-3)}{(s^2-6s+10)^2}$ ve kayma özelliğine göre de

$Le^t\cosh 4t = \dfrac{s-1}{(s-1)^2-16} = \dfrac{s-1}{s^2-2s-15}$ olduğundan,

$$F(s) = 2\cdot\frac{6s}{(s^2+9)^2} + 5\cdot\frac{2(s-3)}{(s^2-6s+10)^2} - 3\cdot\frac{s-1}{s^2-2s-15}$$
$$= \frac{12s}{(s^2+9)^2} + \frac{10(s-3)}{(s^2-6s+10)^2} - \frac{3(s-1)}{s^2-2s-15}$$

olarak bulunur. ○

---

Şimdi, ileride kullanacağımız ve görüntünün integraline bağlı bir formül daha çıkaralım.

$F(s) :\rightarrow f(t)$ kabul edip $\dfrac{f(t)}{t}$ fonksiyonunun görüntüsünü bulalım. Bunun için,

$$\frac{f(t)}{t} \leftarrow: \Phi(s) \qquad \text{veya} \qquad L\frac{f(t)}{t} = \Phi(s)$$

ile gösterip $\Phi(s)$'yi bulalım. Görüntünün türev formülüne göre buradan,

$$-\Phi'(s) :\rightarrow f(t) \qquad \text{yani,} \qquad -\Phi'(s) = F(s)$$

buluruz. Son eşitliğin her iki tarafının $[s, S]$ aralığı üzere integralini alırsak,

$$\Phi(s) - \Phi(S) = \int_s^S F(p)dp$$

olur. Burada, $S \rightarrow \infty$'da limite geçip $\lim\limits_{S\to\infty} \Phi(S) = 0$ olduğunu göz önüne alırsak (bkz. Bölüm 5.1),

$$\Phi(s) = \int_s^\infty F(p)dp$$

yani,

$$\frac{f(t)}{t} \leftarrow: \int_s^\infty F(p)dp \qquad \text{veya} \qquad \mathrm{L}\frac{f(t)}{t} = \int_s^\infty F(p)dp \tag{10}$$

formülünü elde ederiz.

Demek ki, *görüntünün $[s, \infty)$ aralığında integrallenmesi, Laplace dönüşümü açısından, başlangıç fonksiyonunun t'ye bölümüne denktir.*

---

**ÖRNEK 3** Aşağıdaki fonksiyonların görüntülerini bulun.

**(a)** $\dfrac{\sin \beta t}{t}$ **(b)** $\dfrac{\sinh \beta t}{t}$

○ **(a)** $\sin \beta t \leftarrow: \dfrac{\beta}{s^2 + \beta^2}$ olduğunu göz önüne alıp (10) formülünü kullanırsak,

$$L\frac{\sin \beta t}{t} = \int_s^\infty \frac{\beta}{p^2 + \beta^2} dp = \beta \lim_{S\to\infty} \int_s^S \frac{dp}{p^2 + \beta^2} = \lim_{S\to\infty} \arctan \frac{p}{\beta}\Big|_s^S$$

$$= \lim_{S\to\infty} \arctan \frac{S}{\beta} - \arctan \frac{s}{\beta} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{\beta}$$

yani,

$$L\frac{\sin \beta t}{t} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{\beta} \qquad \text{veya} \qquad L\frac{\sin \beta t}{t} = \operatorname{arccot} \frac{s}{\beta}$$

olur;

(b) $\sinh \beta t \leftarrow: \dfrac{\beta}{s^2-\beta^2}$ olduğunu göz önüne alıp yine (10) formülünü kullanırsak,

$$L\frac{\sinh \beta t}{t} = \beta\int_s^\infty \frac{dp}{p^2-\beta^2} = \frac{1}{2}\lim_{S\to\infty}\int_s^S\left(\frac{1}{p-\beta}-\frac{1}{p+\beta}\right)dp = \frac{1}{2}\lim_{S\to\infty}\ln\frac{p-\beta}{p+\beta}\Big|_s^S =$$

$$\frac{1}{2}\lim_{S\to\infty}\ln\frac{S-\beta}{S+\beta}-\frac{1}{2}\ln\frac{s-\beta}{s+\beta} = \frac{1}{2}\ln\frac{s+\beta}{s-\beta},\ (s>|\beta|)$$

yani,

$$L\frac{\sinh \beta t}{t} = \frac{1}{2}\ln\frac{s+\beta}{s-\beta},\ (s>|\beta|)$$

olur (hesaplamada $\lim\limits_{S\to\infty}\ln\dfrac{S-\beta}{S+\beta}=0$ olduğunu kullandık). ○

---

(10) formülünde $s=0$ aldığımızda, eşitliğin sol tarafından elde edilen $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt$ ile sağ taraftaki $\int_0^\infty F(p)dp$ özel olmayan integrallerinin yakınsak olduklarını kabul edersek,

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty F(p)dp \tag{11}$$

formülünü elde ederiz.

(11) eşitliğinin yardımıyla, başka yöntemlerle kesin olarak hesaplanması zor olan kimi özel olmayan integraller hesaplanabilir.

---

**ÖRNEK 4** $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$ integralini hesaplayın.

○ Ele alınan özel olmayan integralin yakınsaklığı bellidir (bkz. 1, Bölüm 7.6). $f(t)=\sin t$ kabul edip (o zaman $F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}$ olur) (11) formülünü kullanırsak,

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \int_0^\infty \frac{dp}{p^2+1} = \lim_{S\to\infty}\int_0^S \frac{dp}{p^2+1} = \lim_{S\to\infty}\arctan p\Big|_0^S = \frac{\pi}{2}$$

yani,

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2},$$

olarak bulunur. ○

---

**ALIŞTIRMALAR (Bölüm 5.2 için)**

1. Aşağıdaki fonksiyonların görüntülerini bulun.

(a) $2t+1$ (b) $at+b$ (c) $t^2+3t+2$

(d) $at^2+bt+c$ (e) $\frac{1}{2}t^3+2t\sin 3t$ (f) $\frac{1}{3}t^2+t\cos 3t+3t\sin 2t$

(g) $t^2e^2-2te^{-2t}+3t\sinh 2t$ (h) $(t+1)\sin 3t$

(i) $(3t+2)\cos 2t$ (j) $\dfrac{e^t-1}{t}$ (k) $\dfrac{e^{\alpha t}-e^{-\beta t}}{t}$

2. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösterin.

(a) $Lt\cosh\beta t=\dfrac{s^2+\beta^2}{(s^2-\beta^2)^2}$ (b) $Lt\sinh\beta t=\dfrac{2\beta s}{(s^2-\beta^2)^2}$

(c) $Lt^2\cosh\beta t=\dfrac{2s(s^2+3\beta^2)}{(s^2-\beta^2)^3}$ (d) $Lt^2\sinh\beta t=\dfrac{2\beta(\beta^2+3s^2)}{(s^2-\beta^2)^3}$

(e) $Lt^2\cosh\beta t=\dfrac{2s(s^2-3\beta^2)}{(s^2+\beta^2)^3}$ (f) $Lt^2\sinh\beta t=\dfrac{2\beta(3s^2-\beta^2)}{(s^2+\beta^2)^3}$

## 5.3 GÖRÜNTÜLER ÇİZELGESİ VE UYGULAMALARI

Önceki iki bölümde elde edilen sonuçları, *görüntüler çizelgesi* diye adlandıracağımız, aşağıdaki çizelgede yazalım.

| | $f(t)=L^{-1}F(s)$ | $Lf(t)=F(s)$ | $D(F)$ |
|---|---|---|---|
| 1. | $1$ | $\frac{1}{s}$ | $s>0$ |
| 2. | $t^n\ (n\in N)$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | $s>0$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **3.** | $e^{\alpha t}$ | $\dfrac{1}{s-\alpha}$ | $s > \alpha$ |
| **4.** | $\cos \beta t$ | $\dfrac{s}{s^2+\beta^2}$ | $s > 0$ |
| **5.** | $\sin \beta t$ | $\dfrac{\beta}{s^2+\beta^2}$ | $s > 0$ |
| **6.** | $\cosh \beta t$ | $\dfrac{s}{s^2-\beta^2}$ | $s > \lvert\beta\rvert$ |
| **7.** | $\sinh \beta t$ | $\dfrac{\beta}{s^2-\beta^2}$ | $s > \lvert\beta\rvert$ |
| **8.** | $t^n e^{\alpha t}$ $(n \in N)$ | $\dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ | $s > \alpha$ |
| **9.** | $e^{\alpha t} \cos \beta t$ | $\dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$ | $s > \alpha$ |
| **10.** | $e^{\alpha t} \sin \beta t$ | $\dfrac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$ | $s > \alpha$ |
| **11.** | $e^{\alpha t} \cosh \beta t$ | $\dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2-\beta^2}$ | $s > \max(\lvert\alpha\rvert, \lvert\beta\rvert)$ |
| **12.** | $e^{\alpha t} \sinh \beta t$ | $\dfrac{\beta}{(s-\alpha)^2-\beta^2}$ | $s > \max(\lvert\alpha\rvert, \lvert\beta\rvert)$ |
| **13.** | $t \cos \beta t$ | $\dfrac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$ | $s > 0$ |
| **14.** | $t \sin \beta t$ | $\dfrac{2\beta s}{(s^2+\beta^2)^2}$ | $s > 0$ |
| **15.** | $t \cosh \beta t$ | $\dfrac{s^2+\beta^2}{(s^2-\beta^2)^2}$ | $s > \lvert\beta\rvert$ |
| **16.** | $t \sinh \beta t$ | $\dfrac{2\beta s}{(s^2-\beta^2)^2}$ | $s > \lvert\beta\rvert$ |
| **17.** | $\dfrac{\sin \beta t}{t}$ | $\dfrac{\pi}{2} - \arctan \dfrac{s}{\beta}$ | $s > 0$ |
| **18.** | $\dfrac{\sinh \beta t}{t}$ | $\dfrac{1}{2} \ln \dfrac{s+\beta}{s-\beta}$ | $s > \lvert\beta\rvert$ |
| **19.** | $te^{\alpha t} \cos \beta t$ | $\dfrac{(s-\alpha)^2-\beta^2}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}$ | $s > \alpha$ |
| **20.** | $te^{\alpha t} \sin \beta t$ | $\dfrac{2\beta(s-\alpha)}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}$ | $s > \alpha$ |

*Çizelgeden görüldüğü gibi, ele alınan elemanter fonksiyonların görüntüsü, basit kesir veya basit kesirlere dönüştürülebilen rasyonel kesirlerdir (17. ve 18. formüller hariç). Bu nedenle, rasyonel kesir şeklindeki keyfi görüntünün başlangıç fonksiyonu (ters Laplace dönüşümü) görüntüler çizelgesinin yardımıyla bulunabilir. Bunun için, verilen rasyonel kesri basit kesirlere ayırıp görüntüler çizelgesini kullanmak yeterlidir.*

**Uyarı 1** Görüntüye göre başlangıç fonksiyonunun bulunması işlemlerinde görüntüleri basit kesirlere ayırırken,

$$\frac{s}{s^2-\beta^2} :\to \cosh \beta t, \qquad \frac{\beta}{s^2-\beta^2} :\to \sinh \beta t$$

olduğundan, sözü edilen kesirlerin paydalarını $(s-\beta)(s+\beta)$ şeklinde yazıp basit kesirlere ayırmak gerekmez.

**Uyarı 2** Genelde, $\dfrac{1}{(s^2+\beta^2)^n}$ şeklindeki $(n > 1)$ görüntülerin başlangıç fonksiyonu, bürüm formülü diye adlandıracağımız formülün yardımıyla bulunur (bkz. Bölüm 5.4). Şimdilik, sözü edilen görüntünün başlangıç fonksiyonunu Örnek 1'in **(d)** seçeneğine uygulanan yapay yöntemle bulalım.

---

**ÖRNEK 1** Aşağıdaki fonksiyonların ters Laplace dönüşümlerini bulun.

**(a)** $\dfrac{3s^2-2s+2}{s^3}$ **(b)** $\dfrac{s^2+s-1}{s(s-1)(s-2)}$ **(c)** $\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$

**(d)** $\dfrac{2s^3+s^2+2s+2}{s^5+2s^4+2s^3}$ **(e)** $\dfrac{4s-1}{(s+1)(s^2+4)^2}$

○ Verilen fonksiyonların ters Laplace dönüşümlerini bulmak için, önce bunları basit kesirlere ayıralım, daha sonra da görüntüler çizelgesini gerektiği şekilde kullanalım.

**(a)** $\dfrac{3s^2-2s+2}{s^3} = \dfrac{3}{s} - \dfrac{2}{s^2} + \dfrac{2}{s^3}$ ve $\dfrac{1}{s} :\to 1,\ \dfrac{1}{s^2} :\to t,\ \dfrac{2}{s^3} :\to t^2$

olduğundan,

$$\frac{3s^2-2s+2}{s} :\to 3-2t+t^2$$

olarak bulunur;

**(b)** $\dfrac{s^2+s-1}{s(s-1)(s-2)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s-1} + \dfrac{C}{s-2}, \quad A = -\dfrac{1}{2}, \quad B = -1, \quad C = \dfrac{5}{2},$

$$\frac{s^2+s-1}{s(s-1)(s-2)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{5}{2}\frac{1}{s-2}$$

yazıp,

$$\frac{1}{s} :\to 1, \qquad \frac{1}{s-1} :\to e^t, \qquad \frac{1}{s-2} :\to e^{2t}$$

olduğunu göz önüne alırsak,

$$\frac{s^2+s-1}{s(s-1)(s-2)} :\to -\frac{1}{2} - e^t + \frac{5}{2}e^{2t}$$

olarak buluruz;

(c) $\dfrac{1}{s^2(s^2+1)} = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s^2+1}$ ve $\dfrac{1}{s^2} :\to t, \dfrac{1}{s^2+1} :\to \sin t$

olduğundan,

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} :\to t - \sin t$$

olur;

(d) $\dfrac{2s^3+s^2+2s+2}{s^5+2s^4+2s^3} = \dfrac{2s^3+s^2+2s+2}{s^3(s^2+2s+2)} = \dfrac{A}{s^3} + \dfrac{B}{s^2} + \dfrac{C}{s} + \dfrac{Ds+E}{s^2+2s+2},$

$$A = 1, \qquad B = C = D = 0, \qquad E = 2,$$

$\dfrac{2s^3+s^2+2s+2}{s^5+2s^4+2s^3} = \dfrac{1}{s^3} + \dfrac{2}{s^2+2s+2}$ ve $\dfrac{1}{s^3} :\to \dfrac{1}{2}t^2,$

$$\frac{1}{s^2+2s+2} = \frac{1}{(s+1)^2+1} :\to e^{-t}\sin t$$

olduğundan,

$$\frac{2s^3+s^2+2s+2}{s^5+2s^4+2s^3} :\to \frac{1}{2}t^2 + 2e^{-t}\sin t$$

olarak buluruz;

(e) $\dfrac{4s-1}{(s+1)(s^2+4)^2} = \dfrac{A}{s+1} + \dfrac{Bs+C}{(s^2+4)^2} + \dfrac{Ds+E}{s^2+4},$

$$A = -\frac{1}{5}, \quad B = 1, \quad C = 3, \quad D = \frac{1}{5}, \quad E = -\frac{1}{5},$$

$$\frac{4s-1}{(s+1)(s^2+4)^2} = -\frac{1}{5}\frac{1}{s+1} + \frac{s+3}{(s^2+4)^2} + \frac{1}{5}\frac{s-1}{s^2+4} =$$

$$-\frac{1}{5}\frac{1}{s+1}+\frac{s}{(s^2+4)^2}+\frac{3}{(s^2+4)^2}+\frac{1}{5}\frac{s}{s^2+4}-\frac{1}{5}\frac{1}{s^2+4}$$

olduğunu ve

$$L^{-1}\frac{1}{s+1}=e^{-t}, \qquad L^{-1}\frac{s}{(s^2+4)^2}=\frac{1}{4}t\sin 2t,$$

$$L^{-1}\frac{s}{s^2+4}=\cos 2t, \quad L^{-1}\frac{1}{s^2+4}=\frac{1}{2}\sin 2t$$

eşitliklerini, hem de,

$$\frac{1}{(s^2+4)^2}=\frac{1}{8}\frac{s^2+4-s^2+4}{(s^2+4)^2}=\frac{1}{8}\frac{1}{s^2+4}-\frac{1}{8}\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

$$:\rightarrow \frac{1}{16}\sin 2t-\frac{1}{8}t\cos 2t$$

olduğunu göz önüne alırsak,

$$L^{-1}\frac{4s-1}{(s+1)(s^2+4)^2}=-\frac{1}{5}e^{-t}+\frac{1}{4}t\sin 2t+\frac{3}{16}\sin 2t-\frac{3}{8}t\cos 2t+$$

$$\frac{1}{5}\cos 2t-\frac{1}{10}\sin 2t$$

yani,

$$L^{-1}\frac{4s-1}{(s+1)(s^2+4)^2}=-\frac{1}{5}e^{-t}+\frac{1}{4}t\sin 2t-\frac{3}{8}t\cos 2t+\frac{7}{80}\sin 2t+\frac{1}{5}\cos 2t$$

olarak buluruz. ○

---

## Gamma Fonksiyonu*

$$\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx \qquad (t>0) \tag{1}$$

eşitliğiyle belirlenen $\Gamma(t)$ fonksiyonuna *Gamma fonksiyonu* denir ($t>0$ için söz konusu özel olmayan integralin varlığı ispatlanabilir. Bunu kabul edelim).

Tanımından Gamma fonksiyonunun aşağıdaki basit özellikleri görülmektedir.

**1.** $\Gamma(t+1)=t\Gamma(t)$

**2.** $\Gamma(n+1)=n!\ \ (n\in N)$

**3.** $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$

❒ **1.** (1) eşitliğinde $t$ yerine $t+1$ yazıp kısmi integralleme yaparsak, $(x^t=u,\ e^{-x}dx=dv)$,

$$\Gamma(t+1)=\int_0^\infty x^t e^{-x}dx=\lim_{A\to\infty}\left(-x^t e^{-x}\Big|_0^A+t\int_0^A x^{t-1}e^{-x}dx\right)=t\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx=t\Gamma(t)$$

olur;

**2.** (1) eşitliğinde $t=1$ alırsak, $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1$ olur ve 1. özellikten ardarda,

$$\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1\cdot 1=1! \qquad \text{yani,} \qquad \Gamma(2)=1!$$

$$\Gamma(3)=2\cdot\Gamma(2)=2\cdot 1!=2! \qquad \text{yani,} \qquad \Gamma(3)=2!$$

.....

$$\Gamma(n+1)=n\cdot\Gamma(n)=n\cdot(n-1)!=n! \qquad \text{yani,} \qquad \Gamma(n+1)=n!$$

elde ederiz;

**3.** (1) eşitliğinde $t=1/2$ alıp, $x=\tau^2$ $(dx=2\tau\,d\tau, x=0\Rightarrow\tau=0; x=\infty,$ $\tau\Rightarrow\infty)$ değişken değiştirilmesi yaparsak,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}dx=2\int_0^\infty \tau^{-1}e^{-\tau^2}\tau d\tau=2\int_0^\infty e^{-\tau^2}d\tau=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$$

bulunur (hesaplamada, $\int_0^\infty e^{-\tau^2}d\tau=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ olduğunu kullandık. Bkz. 2, Bölüm 12.4). ❑

Açıklanan özelliklerden aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

1) $$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \text{ yani, } \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \text{ yani, } \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1\cdot 3}{2^2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \text{ yani, } \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\sqrt{\pi}$$

.....

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}+1\right)=\frac{2n-1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right) \text{ yani,}$$

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$$

2) Her $\alpha\in R$ için $st=\tau$ kabul edersek ($dt=d\tau/s, t=0\Rightarrow\tau=0; t=\infty\Rightarrow\tau=\infty$),

$$Lt^{\alpha}=\int_0^{\infty}e^{-st}t^{\alpha}dt=\int_0^{\infty}e^{-\tau}\left(\frac{\tau}{s}\right)^{\alpha}\frac{d\tau}{s}=\frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^{\infty}\tau^{(\alpha+1)-1}e^{-\tau}d\tau=\frac{1}{s^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha+1)$$

yani,

$$Lt^{\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\qquad(\alpha>-1)\tag{2}$$

eşitliği doğrudur.

Görüldüğü gibi (2) formülü, $Lt^n=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ dönüşüm formülünün $\forall\alpha\in R$ için genelleştirilmesidir.

Örneğin, $Lt^{5/2}=\dfrac{\Gamma(7/2)}{s^{7/2}}=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\dfrac{\sqrt{\pi}}{s^{7/2}}$ eşitliği doğrudur.

---

**ÖRNEK 3** Aşağıdaki fonksiyonların görüntülerini bulun.

**(a)** $3t^3-2t^{3/2}+e^t t^{1/2}+3$ **(b)** $e^t t^2+e^{-2t}\sin t-e^{t/2}t^{7/2}$

○ **(a)** $t^3\leftarrow:\dfrac{3!}{s^4}, t^{3/2}\leftarrow:\dfrac{\Gamma(5/2)}{s^{5/2}}=\dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}\dfrac{1}{s^{5/2}},$

$$e^t t^{1/2}\leftarrow:\frac{\Gamma(3/2)}{(s-1)^{3/2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{(s-1)^{3/2}}, 1\leftarrow:\frac{1}{s}$$

olduğundan,

$$L(3t^3-2t^{3/2}+e^t t^{1/2}+3)=\frac{18}{s^4}-\frac{3\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{s^{5/2}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{(s-1)^{3/2}}+\frac{3}{s}$$

olur;

**(b)** $e^t t^2\leftarrow:\dfrac{2}{(s-1)^3}, e^{-2t}\sin t\leftarrow:\dfrac{1}{(s+2)^2+1},$

$$e^{t/2}t^{7/2}\leftarrow:\frac{\Gamma(9/2)}{(s-1/2)^{9/2}}=\frac{105}{16}\frac{\sqrt{\pi}}{(s-1/2)^{9/2}}$$

olduğunu göz önüne alırsak,

$$L(e^t t^2 + e^{-2t}\sin t - e^{t/2}t^{7/2}) = \frac{2}{(s-1)^3} + \frac{1}{s^2+4s+5} - \frac{105}{16}\frac{\sqrt{\pi}}{(s-1/2)^{9/2}}$$

olarak bulunur. ○

---

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 5.3 için)

**1.** Aşağıdaki fonksiyonların ters Laplace dönüşümlerini bulun.

(a) $\dfrac{s+8}{s^2+4s+5}$ (b) $\dfrac{s+1}{s^2+2s}$

(c) $\dfrac{1}{(s-1)(s-2)^2}$ (d) $\dfrac{1}{(s+a)(s+b)^2}$

(e) $\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$ $(a^2 \neq b^2)$ (f) $\dfrac{a^2}{s(s+a)^2}$

(g) $\dfrac{1}{(s^2+1)^2}$ (h) $\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$

(i) $\dfrac{s}{(s-1)(s^2+\beta^2)}$ (j) $\dfrac{1}{s^3+2s^2+s}$

(k) $\dfrac{1}{s^3+4s^2+13s}$ (l) $\dfrac{\beta}{(s-1)(s^2+\beta^2)}$

(m) $\dfrac{s}{s^3+1}$ (n) $\dfrac{3s^2}{(s^3-1)^2}$

(o) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{s+3+\beta}{s+3-\beta}$ (p) $\dfrac{\pi}{2}\arctan\dfrac{s-2}{\beta}$

**2.** Gamma fonksiyonunu kullanarak aşağıdaki fonksiyonların görüntülerini bulun.

(a) $3t+\sqrt{t}+2$ (b) $t^3+3t^{5/2}+2t^{3/2}+1$

(c) $e^t\sqrt{t}$ (d) $e^{2t}t^{7/2}$

**3.** Gamma fonksiyonunu kullanarak aşağıdaki fonksiyonların ters Laplace dönüşümlerini bulun.

(a) $\dfrac{1}{s^{5/2}}$ (b) $\dfrac{2s+3}{s^{5/2}}$ (c) $\dfrac{s+1}{s^{7/2}}$

(d) $\dfrac{s+3}{(s+1)^{7/2}}$ (e) $\dfrac{1}{(s-3)^{9/2}}$

## 5.4 BAŞLANGIÇ FONKSİYONUN DİFERANSİYELLENMESİ VE İNTEGRALLENMESİ. İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Laplace dönüşümünü diferansiyel denklemlerin çözümüne uygulamak için, denklemin içerdiği türevlerin görüntüsünü bulmak zorundayız. Bunu göz önüne alıp başlangıç fonksiyonunun türevinin Laplace dönüşümünü belirleyelim.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{1}$$

olsun.

**TEOREM 1** $f(t)$ fonksiyonu, $[0,\infty)$ aralığında sürekli, $f'(t)$ ise parçalı sürekli olup her ikisi de $r$ dereceden sınırlı fonksiyon ise, o zaman bunların Laplace dönüşümleri arasında,

$$Lf'(t) = sLf(t) - f(0) \quad \text{veya} \quad f'(t) \leftarrow: sF(s) - f(0) \tag{2}$$

ilişkisi doğrudur.

❐ Teoremin koşullarından, $Lf(t)$ ve $Lf'(t)$ Laplace dönüşümlerinin varlığı açıktır. $Lf'(t)$ dönüşümünü,

$$Lf'(t) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st} f'(t)dt$$

şeklinde yazıp limit altındaki integrale kısmi integralleme yöntemini uygularsak $(e^{-st} = u, f'(t)dt = dv,\ du = -se^{-st}dt, v = f(t))$,

$$Lf'(t) = \lim_{T\to\infty} e^{-st} f(t)\Big|_0^T + s\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st} f(t)dt = sLf(t) - f(0)$$

yani (2) formülünü elde ederiz (hesaplamada $\lim_{T\to\infty} e^{-st} f(t) = 0$ olduğu göz önüne alınmıştır). ❑

$f(t)$ fonksiyonunun diğer türevleri de Teorem 1'in koşullarını sağladığında, (2) formülünü ardarda uygulayıp,

$$Lf''(t) = sLf'(t) - f'(0) = s^2Lf(t) - sf(0) - f'(0)$$

yani,

$$Lf''(t) = s^2Lf(t) - sf(0) - f'(0) \quad \text{veya} \quad f''(t) \leftarrow: s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \tag{3}$$

vb.

$$Lf^{(n)}(t) = s^n Lf(t) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

veya

$$f^{(n)}(t) \leftarrow: s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) \qquad (4)$$

dönüşüm formüllerini elde ederiz.

(4) formülüne *başlangıç fonksiyonunun diferansiyellenmesi formülü* denir.

$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ özel durumunda, (4) genel formülü,

$$Lf^{(n)}(t) = s^n F(s) \quad \text{veya} \quad f^{(n)}(t) \leftarrow: s^n F(s) \qquad (4^*)$$

şeklini alır.

---

**ÖRNEK 1** Aşağıdaki fonksiyonların istenen mertebeden türevlerinin görüntüsünü bulun.

**(a)** $f(t) = t\sin 2t,\ n = 4$ **(b)** $f(t) = t^2 e^{3t},\ n = 3$

○ **(a)** Ele alınan fonksiyon için, $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = 4, f'''(0) = 0$ ve $Lt\sin 2t = \dfrac{4s}{(s^2+4)^2}$ olduğunu göz önüne alırsak, (4) formülüne göre $(n = 4)$,

$$(t\sin 2t)^{(4)} \leftarrow: \frac{4s^5}{(s^2+4)^2} - 4s$$

olur;

**(b)** $t^2 \leftarrow: \dfrac{2}{s^3}$ olduğundan, kayma formülüne göre $t^2e^{3t} \leftarrow: \dfrac{2}{(s-3)^3}$ olur. $f(0) = 0$ olduğu açıktır. $f'(t) = 2te^{3t} + 3t^2e^{3t}$, $f''(t) = 2e^{3t} + 12te^{3t} + 9t^2e^{3t}$ ifadelerinden, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$ olarak bulunur. Bunları göz önüne alırsak, (4) formülüne göre $(n = 3)$,

$$(t^2e^{3t})''' \leftarrow: \frac{2s^3}{(s-3)^3} - 2 \quad \text{veya} \quad L(t^2e^{3t})''' = \frac{2s^3}{(s-3)^3} - 2$$

olur. ○

---

**TEOREM 2** $F(s) :\rightarrow f(t)$ ise, o zaman,

$$L\int_0^t f(\tau)d\tau = \frac{F(s)}{s} \quad \text{veya} \quad \int_0^t f(\tau)d\tau \leftarrow: \frac{F(s)}{s} \tag{5}$$

formülü doğrudur.

❒ $\int_0^t f(\tau)d\tau = \varphi(t)$ kabul edelim. $\varphi(t)$'nin Laplace dönüşümünün varlığı kolaylıkla gösterilebilir. $\varphi(t) \leftarrow: \Phi(s)$ ile gösterip $\Phi(s)$'yi bulalım. $\varphi(0) = 0$ olduğunu göz önüne alıp (2) formülünü kullanırsak,

$$\varphi'(t) \leftarrow: s\Phi(s)$$

yazabiliriz. Öte yandan,

$$\varphi'(t) = f(t) \leftarrow: F(s)$$

olduğundan,

$$s\Phi(s) = F(s) \quad \text{yani} \quad \frac{F(s)}{s} = \Phi(s) :\rightarrow \varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

olur. Demek ki, (5) formülü doğrudur. ❒

(5) formülüne *başlangıç fonksiyonunun integrallenmesi formülü* denir.

(5) formülünden görüldüğü gibi, integrali hesaplamadan, integraliçi fonksiyonun görüntüsünün yardımıyla integralin görüntüsü yazılabilir.

(2) ve (5) formüllerinden, $f(0) = 0$ *özel durumunda, başlangıç fonksiyonunun diferansiyellenmesi ve integrallenmesi, Laplace dönüşümü açısından, görüntü fonksiyonunun sırasıyla* $s$ *ile çarpımına ve bölümüne denktir* önermesi elde edilir.

---

**ÖRNEK 2** Aşağıdaki fonksiyonların görüntüsünü bulun.

**(a)** $\int_0^t e^{\alpha\tau} \sin \beta\tau d\tau$ **(b)** $\int_0^t e^{\alpha\tau}\tau^n d\tau \quad (n \in N)$

**(c)** $e^t \int_0^t \tau \sin \tau d\tau$ **(d)** $\int_0^t \frac{\sin t}{t} dt$

○ **(a)** $e^{\alpha t} \sin \beta t \leftarrow: \frac{\beta}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}$ olduğunu göz önüne alırsak, (5) formülüne göre,

$$\int_0^t e^{\alpha\tau} \sin \beta\tau d\tau \leftarrow: \frac{\beta}{s[(s-\alpha)^2 + \beta^2]}$$

olur;

**(b)** $t^n e^{\alpha t} \leftarrow: \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ olduğundan, yine (5) formülüne göre,

$$\int_0^t \tau^n e^{\alpha\tau} d\tau \leftarrow: \frac{n!}{s(s-\alpha)^{n+1}}$$

olarak bulunur;

**(c)** $t \sin t \leftarrow: \dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$ olduğundan, (5) formülüne göre,

$$\int_0^t \tau \sin \tau d\tau \leftarrow: \frac{2}{(s^2+1)^2}$$

yazabiliriz. Buradan, kayma özelliğine göre,

$$e^t \int_0^t \tau \sin \tau d\tau \leftarrow: \frac{2}{[(s-1)^2+1]^2}$$

yani,

$$Le^t \int_0^t \tau \sin \tau d\tau = \frac{2}{(s^2-2s+2)^2}$$

elde edilir;

**(d)** $L\dfrac{\sin t}{t} = \dfrac{\pi}{2} - \arctan s$ olduğundan (bkz. Bölüm 5.2), (5) formülüne göre,

$$L\int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan s\right)$$

olur. ○

---

Bilindiği gibi, $\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau$ integrali, $f(t)$ ve $\varphi(t)$ *fonksiyonlarının bürümü olarak adlandırılır* ve $f * \varphi$ ile gösterilir.

$$f * \varphi = \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau \tag{6}$$

(6) formülünde, $t-\tau=\xi$ $(\tau=t-\xi, d\tau=-d\xi, \tau=0 \Rightarrow \xi=t, \tau=t \Rightarrow \xi=0)$ şeklinde değişken değiştirilmesi yaparsak,

$$f*\varphi=\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau=-\int_t^0 f(t-\xi)\varphi(\xi)d\xi=\int_0^t \varphi(\xi)f(t-\xi)d\xi=\varphi*f$$

yani,

$$f*\varphi=\varphi*f \quad (\textit{bürümün simetrikliği})$$

sonucunu elde ederiz.

**TEOREM 3** $Lf(t)=F(s), L\varphi(t)=\Phi(s)$ ise, o zaman

$$L\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau=F(s)\Phi(s)$$

veya

$$\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau \leftarrow: F(s)\Phi(s) \tag{7}$$

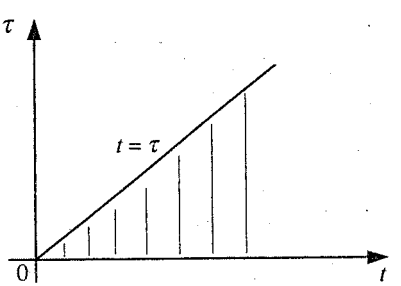
formülü doğrudur.

❒ Laplace dönüşümünün tanımına göre,

$$L\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau=\int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau dt$$

yazabiliriz. Sağ taraftaki iki defa tekrarlanan integralin, $D\{0\le t<\infty,\ 0\le\tau\le t\}$ integralleme bölgesini $D\{0\le\tau<\infty,\ \tau\le t<\infty\}$ şeklinde yazıp (Şekil 24) integralleme sırasını aşağıdaki şekilde değiştirebiliriz (bkz. 2, Bölüm 12.3):

$$L\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau=\int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau dt=\int_0^\infty f(\tau)d\tau\int_\tau^\infty e^{-st}\varphi(t-\tau)dt$$




**ŞEKİL 24**

Burada $t-\tau=\xi$ $(dt=d\xi,\ t=\tau \Rightarrow \xi=0,\ t=\infty \Rightarrow \xi=\infty)$ değişken değiştirmesi yaparsak,

$$L\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-s(\xi+\tau)}\varphi(\xi)d\xi$$

$$= \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-s\xi}\varphi(\xi)d\xi = F(s)\Phi(s)$$

olur. Yani, (7) formülü doğrudur. ❑

(7) formülüne *görüntülerin çarpımı* veya *bürüm formülü denir* (başlangıç fonksiyonlarının bürümünün görüntüsü olduğundan).

Açıktır ki, (7) formülü,

$$L\int_0^t \varphi(\tau)f(t-\tau)d\tau = F(s)\Phi(s) \quad \text{veya} \quad \int_0^t \varphi(\tau)f(t-\tau)d\tau \leftarrow: F(s)\Phi(s) \quad (7^*)$$

şeklinde de yazılabilir.

(7) ve (7*) formülleri, daha basitçe,

$$L(f*\varphi) = F(s)\Phi(s) \quad \text{veya} \quad (f*\varphi) \leftarrow: F(s)\Phi(s) \qquad (7^{**})$$

şeklinde de yazılır.

Bürüm formülü, *integral denklemlerin* (yani, bilinmeyenin integralini içeren denklemlerin) çözümünde ve görüntüye göre başlangıç fonksiyonunun bulunmasında sıkça kullanılmaktadır.

---

**ÖRNEK 3** Aşağıdaki integral denklemleri çözün $(y=y(t)=?)$.

**(a)** $\int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau = t$ **(b)** $y(t) = 2\cos 3t + \int_0^t \sin 2(t-\tau)y(\tau)d\tau$

○ $y(t) \leftarrow: \overline{y}(s)$ kabul edip ele alınan denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümünü uygularsak,

$$L\int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau = Lt \quad \text{veya} \quad L\int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau = \frac{1}{s^2}$$

olur. Burada $f(t)=y(t) \leftarrow: \overline{y}(s)=F(s)$, $\varphi(t)=e^t \leftarrow: \dfrac{1}{s-1}=\Phi(s)$ kabul edip sol tarafa bürüm formülünü uygularsak,

$$\frac{\overline{y}(s)}{s-1} = \frac{1}{s^2} \quad \text{veya} \quad \overline{y}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} :\rightarrow 1-t$$

yani,

$$y(t) = 1 - t$$

olarak bulunur;

**(b)** Ele alınan denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümünü alıp, $Ly(t) = \bar{y}(s)$, $L\cos 3t = \dfrac{s}{s^2+9}$, $L\sin 2t = \dfrac{2}{s^2+4}$ olduğunu ve bürüm formülünü göz önüne alırsak,

$$Ly(t) = L2\cos 3t + L\int_0^t \sin 2(t-\tau)y(\tau)d\tau$$

$$\bar{y}(s) = \frac{2s}{s^2+9} + \frac{2\bar{y}(s)}{s^2+4}$$

$$\bar{y}(s) = \frac{2s(s^2+4)}{(s^2+9)(s^2+2)}$$

olur. Sağ taraftaki rasyonel kesri basit kesirlere ayırırsak,

$$\frac{s(s^2+4)}{(s^2+9)(s^2+2)} = \frac{As+B}{s^2+9} + \frac{Cs+D}{s^2+2}, \quad A = \frac{5}{7}, \quad C = \frac{2}{7}, \quad B = D = 0$$

$$\frac{s(s^2+4)}{(s^2+9)(s^2+2)} = \frac{5}{7}\frac{s}{s^2+9} + \frac{2}{7}\frac{s}{s^2+2}$$

yani,

$$\bar{y}(s) = \frac{10}{7}\frac{s}{s^2+9} + \frac{4}{7}\frac{s}{s^2+2} :\rightarrow \frac{10}{7}\cos 3t + \frac{4}{7}\cos\sqrt{2}t$$

olur. Böylece,

$$y(t) = \frac{10}{7}\cos 3t + \frac{4}{7}\cos\sqrt{2}t$$

olarak bulunur. ○

---

**ÖRNEK 4** Sağ tarafı basit kesirlere ayırmadan, $\dfrac{3s}{(s^2+9)(s^2+16)}$ görüntüsünün başlangıç fonksiyonunu bulun.

○ $F(s) = \dfrac{3}{s^2+9} \leftarrow: \sin 3t = f(t)$, $\Phi(s) = \dfrac{s}{s^2+16} \leftarrow: \cos 4t = \varphi(t)$ kabul edip bürüm formülünü uygularsak,

$$\frac{3s}{(s^2+9)(s^2+16)} :\longrightarrow \int_0^t \sin 3\tau \cos 4(t-\tau)d\tau$$

yazabiliriz. Burada,

$$\int_0^t \sin 3\tau \cos 4(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t [\sin(4t-\tau) - \sin(4t-7\tau)]d\tau =$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos(4t-\tau) - \frac{1}{7}\cos(4t-7\tau)\right]\Big|_0^t = \frac{1}{2}\left[\cos 3t - \frac{1}{7}\cos 3t - \cos 4t + \frac{1}{7}\cos 4t\right] =$$

$$\frac{3}{7}(\cos 3t - \cos 4t)$$

olduğunu göz önüne alırsak,

$$L^{-1}\frac{3s}{(s^2+9)(s^2+16)} = \frac{3}{7}(\cos 3t - \cos 4t)$$

buluruz. ○

---

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 5.4 için)

1. Aşağıdaki fonksiyonların $n$. mertebeden türevlerinin görüntüsünü bulun.

(a) $f(t) = t\cos 3t,\ n = 2$ (b) $f(t) = t^2 \sin 2t,\ n = 3$

(c) $f(t) = t^4 e^{2t},\ n = 3$ (d) $f(t) = t^5 e^t,\ n = 4$

(e) $f(t) = t^3 \sin t,\ n = 5$ (f) $f(t) = t^3 e^{2t},\ n = 4$

(g) $f(t) = e^t \sin 2t,\ n = 3$ (h) $f(t) = e^{2t}\cos 3t,\ n = 3$

(i) $f(t) = t\sinh t,\ n = 3$ (j) $f(t) = t^2 \cosh 3t,\ n = 2$

(k) $f(t) = t^2 \sin 4t,\ n = 2$

2. Aşağıdaki fonksiyonların görüntülerini bulun.

(a) $\int_0^t e^{\alpha\tau}\cos\beta\tau d\tau$ (b) $e^t\int_0^t \tau\cos\tau d\tau$

(c) $e^t\int_0^t e^{\alpha\tau}\sin\beta\tau d\tau$

3. Aşağıdaki integral denklemleri çözün.

(a) $\int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau = \sin t$ (b) $\int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau = \sin t$

(c) $\int_0^t e^{2(t-\tau)}y(\tau)d\tau = t^2e^t$ (d) $\int_0^t \cosh(t-\tau)y(\tau)d\tau = t$

(e) $y(t) = t + \frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)^2 y(\tau)d\tau$ (f) $y(t) = t + \int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)d\tau$

(g) $y(t) = \cos t + \int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau$ (h) $y(t) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^t \sinh(t-\tau)y(\tau)d\tau$

(i) $y(t) = t - \int_0^t \sinh(t-\tau)y(\tau)d\tau$ (j) $y(t) = \sinh t - \int_0^t \cosh(t-\tau)y(\tau)d\tau$

4. Görüntülerin çarpımı (bürüm) formülünü kullanarak, aşağıdaki görüntülerin başlangıç fonksiyonunu bulun.

(a) $\dfrac{1}{s^2(s-a)}$ (b) $\dfrac{a}{s(s^2+a^2)}$

(c) $\dfrac{a}{s^2(s^2+a^2)}$ (d) $\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$

(e) $\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$ (f) $\dfrac{s^2}{(s^2+4)(s^2+9)}$

## 5.5 KİMİ ÖZGÜN FONKSİYONLARIN LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ

### 5.5.1 Basamak Fonksiyonu

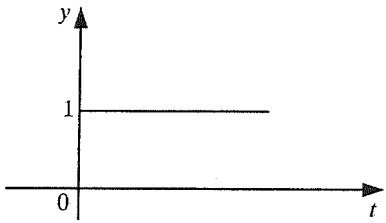
Önce, *birim basamak fonksiyonu* adı verilen ve

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

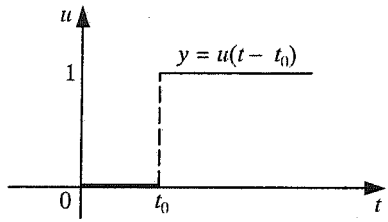
eşitliğiyle belirlenen fonksiyonu ele alalım (Şekil 25*a*). Görüldüğü gibi, $[0,\infty)$ aralığında birim basamak fonksiyonu $f(t) \equiv 1$ fonksiyonuyla aynıdır ve bu nedenle de

$$Lu(t) = \frac{1}{s} \qquad \text{veya} \qquad u(t) \leftarrow\!: \frac{1}{s}$$

olacağı açıktır.




**ŞEKİL 25a**




**ŞEKİL 25b**

Birim basamak fonksiyonunun yardımıyla, *dönüştürülmüş birim basamak fonksiyonu* diye adlandırılan

$$u(t-t_0)=\begin{cases}0, & 0\le t<t_0\\ 1, & t_0\le t\end{cases} \tag{2}$$

fonksiyonunu belirleyelim (Şekil 25*b*). Görüldüğü gibi, dönüştürülmüş birim basamak fonksiyonu, $u(t)$ fonksiyonunu (onun grafiğini) apsis ekseni boyunca $t_0$ kadar sağa kaydırmakla elde edilir. $u(t)$ ve $u(t-t_0)$ birim basamak fonksiyonlarına *basit basamak fonksiyonları* denir.

Şimdi, dönüştürülmüş birim basamak fonksiyonunun görüntüsünü bulalım:

$$Lu(t-t_0)=\int_0^\infty e^{-st}u(t-t_0)dt=\int_0^{t_0} e^{-st}u(t-t_0)dt+\int_{t_0}^\infty e^{-st}u(t-t_0)dt=\int_{t_0}^\infty e^{-st}dt$$

Burada $t-t_0=\tau$ değişken değiştirilmesi yaparsak ($t=\tau+t_0$, $dt=d\tau$, $t=t_0\Rightarrow\tau=0$, $t=\infty\Rightarrow\tau=\infty$),

$$Lu(t-t_0)=\int_0^\infty e^{-s(\tau+t_0)}d\tau=e^{-st_0}\int_0^\infty e^{-s\tau}d\tau=\frac{e^{-st_0}}{s}$$

yani,

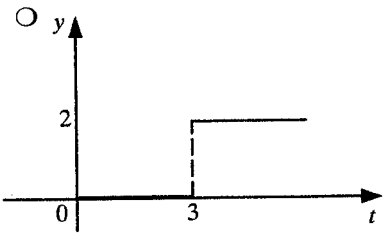
$$Lu(t-t_0)=\frac{e^{-st_0}}{s}\qquad \text{veya}\qquad u(t-t_0)\leftarrow:\frac{e^{-st_0}}{s} \tag{3}$$

elde ederiz.

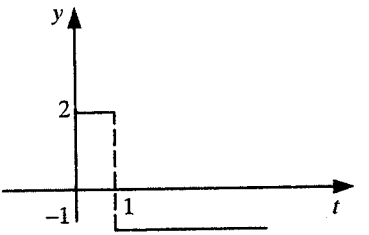
---

**ÖRNEK 1** Aşağıdaki fonksiyonların $[0,\infty)$ aralığında grafiklerini çizin ve görüntülerini bulun.

**(a)** $2u(t-3)$ **(b)** $2-3u(t-1)$ **(c)** $3-2u(t-2)+u(t-3)$




ŞEKİL26a




ŞEKİL26b

(a) $u(t-3)=\begin{cases}0, & 0\le t<3\\ 1, & 3\le t\end{cases}$ olduğundan, verilen fonksiyonun grafiği Şekil 26*a*'daki gibidir.

Laplace dönüşümünün doğrusallık özelliğine ve (3) formülüne göre,

$$L2u(t-3)=2Lu(t-3)=\frac{2e^{-3s}}{s}$$

olacağı açıktır;

(b) Ele alınan fonksiyon, dallarıyla

$$2-3u(t-1)=\begin{cases}2-0=2, & 0\le t<1\\ 2-3=-1, & 1\le t\end{cases}$$

şeklinde yazılabildiğinden, grafiği Şekil 26*b*'deki gibidir. Yine Laplace dönüşümünün doğrusallık özelliğine ve (3) formülüne göre,

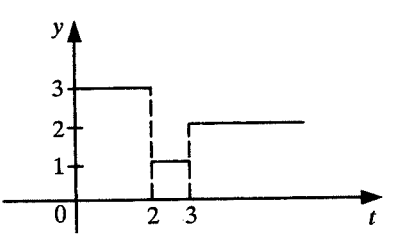
$$L[2-3u(t-1)]=2L1-3Lu(t-1)=\frac{2}{s}-\frac{3e^{-s}}{s}=\frac{1}{s}(2-3e^{-s})$$

olacağı açıktır;

(c) Önce, fonksiyonu dallarıyla

$$3-2u(t-2)+u(t-3)=\begin{cases}3-2\cdot 0+0=3, & 0\le t<2\\ 3-2\cdot 1+0=1, & 2\le t<3\\ 3-2\cdot 1+1=2, & 3\le t\end{cases}$$

şeklinde yazıp grafiğini çizelim (Şekil 26*c*).




ŞEKİL 26c

Bu durumda fonksiyonun görüntüsünün

$$L[3-2u(t-2)+u(t-3)] = 3L1 - 2Lu(t-2) + Lu(t-3)$$
$$= \frac{1}{s}(3-2e^{-2s}+e^{-3s})$$

şeklinde olacağı açıktır. ○

---

**ÖRNEK 2** Dallarıyla verilen aşağıdaki fonksiyonları, basamak fonksiyonlarının yardımıyla "bir eşitlikle" yazıp görüntülerini bulun.

(a) $f(t) = \begin{cases} -3, & 0 \le t < 1 \\ 4, & 1 \le t < 3 \\ 2, & 3 \le t \end{cases}$ (b) $f(t) = \begin{cases} 3, & 0 \le t < 2 \\ 0, & 2 \le t < 3 \\ -1, & 3 \le t < 5 \\ 2, & 5 \le t \end{cases}$

○ **(a)** Ele alınan fonksiyonun şekline ve $u(t-t_0)$ fonksiyonunun tanımına dayanarak, onu

$$f(t) = -3 + 7u(t-1) - 2u(t-3) \qquad (*)$$

şeklinde yazabiliriz. (Gerçekten de her bir tanım aralığında verilen fonksiyonla (*)'la tanımlanan fonksiyonu karşılaştırdığımızda, [0, 1) aralığındaki $t$ değerleri için $u(t-1)$ ve $u(t-3)$ fonksiyonları, tanımları gereği sıfır olduğundan, bu aralıkta (*) ifadesinin sağ tarafının $-3$'e eşit olacağını, yine [1, 3) aralığındaki $t$ değerleri için $u(t-1)=1$, $u(t-3)=0$ olduğundan, (*)'ın sağ tarafının bu aralıkta 4'e eşit olacağını, son olarak da 3'ten büyük $t$ değerlerinde $u(t-1)=1$, $u(t-3)=1$ olacağından, (*) ifadesinin bu aralıkta 2'ye eşit olacağını görürüz. Yani, verilen fonksiyonla (*) ifadesinin sağ tarafı çakışmaktadır).

Şimdi, verilen fonksiyonun görüntüsünü bulalım:

$$Lf(t) = L[-3+7u(t-1)-2u(t-3)] = \frac{1}{s}(-3+7e^{-s}-2e^{-3s})$$

**(b)** Benzer şekilde, verilen fonksiyonu

$$f(t) = 3 - 3u(t-2) - u(t-3) + 3u(t-5)$$

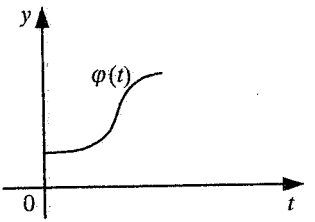
şeklinde yazıp,

$$Lf(t) = \frac{1}{s}(3-3e^{-2s}-e^{-3s}+3e^{-5s})$$

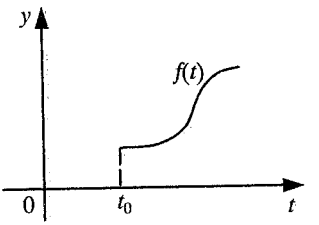
elde ederiz. ○

---

### 5.5.2 Gecikmiş Fonksiyon




Şekil 27a




Şekil 27b

Herhangi $\varphi(t)$ fonksiyonunu ele alıp ($t \in [0,\infty)$),

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < t_0 \\ \varphi(t - t_0), & t_0 \le t \end{cases} \tag{3}$$

şeklinde tanımlı $f(t)$ fonksiyonunu göz önüne alalım (Şekil 27*a*, *b*). Görüldüğü gibi, $\varphi(t)$ fonksiyonu zamana bağlı olarak hangi süreci ifade ediyorsa, $f(t)$ fonksiyonu da $t_0$ kadar gecikmeyle aynı süreci ifade eder.

(3) eşitliğiyle belirlenen $f(t)$ fonksiyonuna $\varphi(t)$ 'nin $t_0$ kadar *gecikmiş fonksiyonu* denir.

Gecikmiş fonksiyonu, Örnek 2'dekine benzer biçimde, basamak fonksiyonunun yardımıyla

$$f(t) = u(t - t_0)\varphi(t - t_0) \tag{4}$$

şeklinde yazabiliriz.

---

**ÖRNEK 3** Verilen $t_0$ için aşağıdaki fonksiyonların gecikmiş fonksiyonlarını yazın.

**(a)** $\varphi(t) = e^t,\ t_0 = 1$ **(b)** $\varphi(t) = \sin t,\ t_0 = \frac{\pi}{3}$ **(c)** $\varphi(t) = t^2,\ t_0 = 2$

○ (4) eşitliğini kullanarak, gecikmiş fonksiyonları,

**(a)** $f(t) = u(t-1)e^{t-1}$ **(b)** $f(t) = u(t - \pi/3)\sin(t - \pi/3)$

**(c)** $f(t) = u(t-2)(t-2)^2$

şeklinde yazabiliriz. ○

---

Şimdi, $L\varphi(t) = \Phi(s)$ olduğunu kabul edip gecikmiş fonksiyonun Laplace dönüşümünü belirleyelim:

$$Lf(t) = Lu(t-t_0)\varphi(t-t_0) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-st}\varphi(t-t_0)dt$$

Burada $t - t_0 = \tau$ kabul edersek ($t = \tau + t_0$, $dt = d\tau$, $t = t_0 \Rightarrow \tau = 0, t = \infty \Rightarrow \tau = \infty$)

$$Lf(t) = \int_0^{\infty} e^{-s(\tau+t_0)}\varphi(\tau)d\tau = e^{-t_0 s}\int_0^{\infty} e^{-s\tau}\varphi(\tau)d\tau = e^{-t_0 s}\Phi(s)$$

yani,

$$Lf(t) = e^{-t_0 s}L\varphi(t) \qquad \text{veya} \qquad f(t) \leftarrow: e^{-t_0 s}\Phi(s)$$

ya da

$$u(t-t_0)\varphi(t-t_0) \leftarrow: e^{-t_0 s}\Phi(s) \tag{5}$$

olur. Demek ki, $\varphi(t)$'nin $t_0$ kadar *gecikmiş fonksiyonun görüntüsü, sözü edilen fonksiyonun görüntüsünün* $e^{t_0 s}$ *ile çarpımına eşittir.*

---

**ÖRNEK 4** Aşağıdaki fonksiyonların görüntülerini bulun.

**(a)** $u(t-\alpha)\sin(t-\alpha)$ **(b)** $u(t-\alpha)\cos^2(t-\alpha)$ **(c)** $u(t-3)e^{2t-3}$

○ **(a)** $\varphi(t) = \sin t \leftarrow: \dfrac{1}{s^2+1} = \Phi(s)$ olduğunu göz önüne alıp (5) formülünü kullanırsak,

$$u(t-\alpha)\sin(t-\alpha) \leftarrow: \frac{e^{-\alpha s}}{s^2+1}$$

olur;

**(b)** $\varphi(t) = \cos^2 t = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2t \leftarrow: \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{2}\dfrac{s}{s^2+4} = \Phi(s)$ olduğunu göz önüne alırsak, (5) formülüne göre,

$$u(t-\alpha)\cos^2(t-\alpha) \leftarrow: \frac{1}{2}e^{-\alpha s}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4}\right)$$

olur;

**(c)** Verilen fonksiyonu $e^{2t-3} = e^{2(t-3)+3} = e^3 e^{2(t-3)}$ şeklinde dönüştürüp $\varphi(t) = e^{2t} \leftarrow: \dfrac{1}{s-2} = \Phi(s)$ olduğunu göz önüne alırsak, yine (5) formülüne göre,

$$u(t-3)e^{2t-3} \leftarrow: e^3 \frac{e^{-3s}}{s-2} = \frac{e^{-3(s-1)}}{s-2}$$

olur. ○

---

(5) formülünün yardımıyla, görüntüye göre başlangıç fonksiyonu da bulunabilir.

---

**ÖRNEK 5** Aşağıdaki fonksiyonların ters Laplace dönüşümlerini bulun.

**(a)** $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{4e^{-3s}}{s}$ **(b)** $F(s) = \frac{1}{s^2}(2 - 3e^{-2s} + 4e^{-3s})$

○ **(a)** $L^{-1}F(s) = L^{-1}\frac{1}{s} - 2L^{-1}\frac{e^{-s}}{s} + 4L^{-1}\frac{e^{-3s}}{s} :\rightarrow 1 - 2u(t-1) + 4u(t-3)$

**(b)** $L^{-1}F(s) = L^{-1}\frac{1}{s^2}(2 - 3e^{-2s} + 4e^{-3s}) = 2L^{-1}\frac{1}{s^2} - 3L^{-1}\frac{e^{-2s}}{s^2} + 4L^{-1}\frac{e^{-3s}}{s^2}$

ve $\Phi(s) = \frac{1}{s^2} :\rightarrow t = \varphi(t)$ olduğunu göz önüne alıp (5) formülünü uygularsak,

$$L^{-1}F(s) = 2t - 3u(t-2)(t-2) + 4u(t-3)(t-3)$$

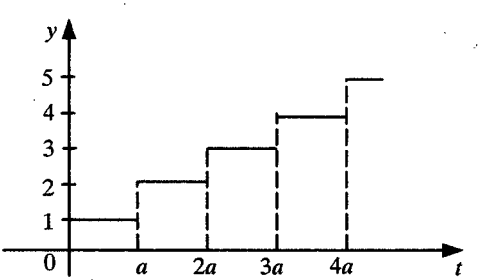
olur. ○

---

**ÖRNEK 6** $f(t) = n+1$ $(na \le t \le (n+1)a,\ \ n = \overline{0,\infty},\ \ a > 0)$ şeklinde belirlenen fonksiyonun (*merdiven fonksiyonu*, Şekil 28) görüntüsünü bulun.

○ Ele alınan fonksiyonu, basamak fonksiyonlarının yardımıyla

$$f(t) = 1 + u(t-a) + u(t-2a) + \cdots + u(t-na) + \cdots$$




**ŞEKİL 28**

şeklinde yazıp Laplace dönüşümünü alırsak,

$$Lf(t) = \frac{1}{s}(1 + e^{-as} + e^{-2as} + \cdots + e^{-nas} + \cdots)$$

yani,

$$Lf(t) = \frac{1}{s}\frac{1}{1-e^{-as}}$$

olur (işlem yapılırken, geometrik serinin toplam formülünü, yani $1 + e^{-as} + e^{-2as} + \ldots + e^{-nas} + \ldots = \dfrac{1}{1-e^{-as}}$ eşitliğini kullandık. Bkz. 2, Bölüm 8.1). ○

### 5.5.3 Devirli Fonksiyonun Görüntüsü

Devirli fonksiyonlarla ilgili Laplace dönüşümü uygulamalarında sık sık kullanılan aşağıdaki teoremi (formülü) kanıtlayalım.

**TEOREM** $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli ve $T$ devirli $f(t)$ fonksiyonun Laplace dönüşümü için

$$Lf(t) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st} f(t)dt \tag{6}$$

formülü doğrudur.

❒ Teoremin koşullarına göre, $\forall t \in [0,\infty)$ için $|f(t)| \le M$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Yani, $Lf(t)$ vardır ve

$$Lf(t) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^{2T} e^{-st} f(t)dt + \cdots + \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)dt + \cdots$$

yani,

$$Lf(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)dt \tag{7}$$

eşitliğinin doğruluğu açıktır.

(7) eşitliğinin sağ tarafında $t = \tau + nT$ $(n = \overline{0,\infty})$ değişken değiştirmesini yaparsak ($dt = d\tau$, $t = nT \Rightarrow \tau = 0$, $t = (n+1)T \Rightarrow \tau = T$),

$$Lf(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T e^{-s(\tau+nT)} f(\tau + nT)d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau)d\tau$$

yani,

$$Lf(t) = \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau)d\tau \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT}$$

eşitliğini elde ederiz (hesaplamada $f(\tau + nT) = f(\tau)$ eşitliği göz önüne alınmıştır. Bkz. 1, Bölüm 1.9). Burada,

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} = \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

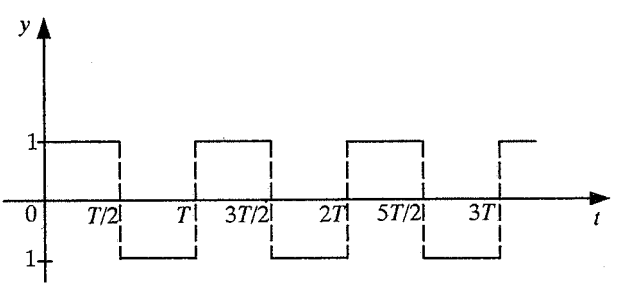
olduğunu göz önüne alırsak (sözü edilen seri, $q = e^{-Ts} < 1$ olmak üzere geometrik seridir. Bkz. 2, Bölüm 8.1), (6) formülünün doğruluğunu elde ederiz. ❑

**Uyarı** Devirli fonksiyonun analitik ifadesi, basamak fonksiyonunun yardımı ile açık şekilde verildiğinde, (6) formülünü kullanmadan,onun Laplace dönüşümü doğrudan hesaplanabilir (Örnek 7'nin (**a**) seçeneğine bakınız).

---

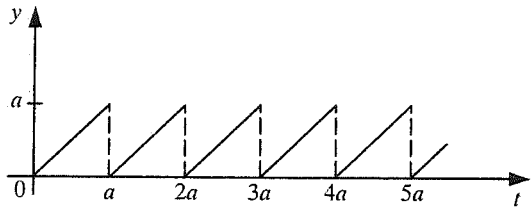
**ÖRNEK 7** Grafiği Şekil 29'da verilen fonksiyonların görüntülerini bulun.

(**a**)




**ŞEKİL 29a**

(b)




**ŞEKİL 29b**

○ (a) Örneği iki yöntemle çözelim.

*1. Yöntem* Görüldüğü gibi, ele alınan fonksiyon $T$ devirli olup $[0,T)$ aralığında

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<T/2\\ -1, & T/2\le t<T\end{cases}$$

formülüyle belirlenir. Bu nedenle, (6) formülüne göre,

$$Lf(t)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\left[\int_0^{T/2}e^{-st}\cdot 1dt+\int_{T/2}^{T}e^{-st}\cdot(-1)dt\right]=\frac{1}{1-e^{-Ts}}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{T/2}+\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{T/2}^{T}\right)=$$

$$\frac{1}{1-e^{-sT}}\left(-\frac{1}{s}e^{-sT/2}+\frac{1}{s}+\frac{1}{s}e^{-sT}-\frac{1}{s}e^{-sT/2}\right)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\frac{1}{s}\left(1-e^{-sT/2}\right)^2$$

yani,

$$Lf(t)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\frac{1}{s}\left(1-e^{-sT/2}\right)^2$$

olur. Burada, $1-e^{-sT}=(1+e^{-sT/2})(1-e^{-sT/2})$ olduğunu göz önüne alırsak,

$$Lf(t)=\frac{1-e^{-sT/2}}{1+e^{-sT/2}}\frac{1}{s}\qquad\text{veya}\qquad Lf(t)=\frac{1}{s}\tanh\frac{sT}{4}$$

elde ederiz (burada, $\tanh\frac{sT}{4}=\frac{e^{sT/4}-e^{-sT/4}}{e^{sT/4}+e^{-sT/4}}=\frac{1-e^{-sT/2}}{1+e^{-sT/2}}$ olduğu göz önüne alınmıştır);

*2. Yöntem* Fonksiyonun şekline dayanarak, analitik ifadesini basamak fonksiyonunun yardımıyla,

$$f(t)=1-2u(t-T/2)+2u(t-T)-2u(t-3T/2)+\cdots+$$
$$(-1)^n2u[t-(2n-1)T/2]+\cdots$$

biçiminde yazıp Laplace dönüşümünü uygularsak,

$$Lf(t) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-sT/2} + \frac{2}{s}e^{-sT} - \frac{2}{s}e^{-3sT/2} + \cdots + (-1)^n \frac{2}{s}e^{-nsT/2} + \cdots =$$

$$\frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-T/2}(1 - e^{-sT/2} + e^{-sT} - \cdots + (-1)^n e^{-(n-1)sT/2} + \cdots) =$$

$$\frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-sT/2}\frac{1}{1+e^{-sT/2}} = \frac{1}{s}\frac{1-e^{-sT/2}}{1+e^{-sT/2}} = \frac{1}{s}\tanh\frac{sT}{4}$$

olur;

**(b)** Görüldüğü gibi, ele alınan fonksiyon $a\,(>0)$ devirli olup $[0,a)$ aralığında

$$f(t) = t$$

eşitliğiyle belirlenir. Bu nedenle, (6) formülüne göre,

$$Lf(t) = \frac{1}{1-e^{-sa}}\int_0^a e^{-st}t\,dt = \frac{1}{1-e^{-sa}}\left(-\frac{1}{s}te^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$\frac{1}{1-e^{-sa}}\left(-\frac{a}{s}e^{-sa} - \frac{1}{s^2}e^{-sa} + \frac{1}{s^2}\right)$$

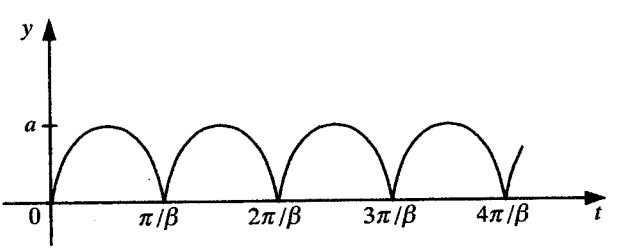
yani,

$$Lf(t) = \frac{1}{1-e^{-sa}}\frac{1-e^{-sa}-sae^{-sa}}{s^2} \qquad \text{veya} \qquad Lf(t) = \frac{1}{s^2} - \frac{ae^{-sa}}{s(1-e^{-sa})}$$

bulunur. ○

---

**ÖRNEK 8** $f(t) = a|\sin\beta t|$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulun.




**ŞEKİL 30**

○ Görüldüğü gibi, $f(t)$, sürekli ve $T = \frac{\pi}{\beta}$ devirli fonksiyondur (Şekil 30). (6) formülüne göre, fonksiyonun Laplace dönüşümü,

$$Lf(t) = \frac{a}{1-e^{-s\pi/\beta}} \int_0^{\pi/\beta} e^{-st} \sin \beta t dt = \frac{a}{1-e^{-s\pi/\beta}} \left[ \frac{e^{-st}}{s^2+\beta^2} (-s \sin \beta t - \beta \cos \beta t) \right]_0^{\pi/\beta} =$$

$$\frac{a}{1-e^{-s\pi/\beta}} \left[ \frac{e^{-s\pi/\beta}\beta + \beta}{s^2+\beta^2} \right] = \frac{a\beta}{s^2+\beta^2} \frac{1+e^{-s\pi/\beta}}{1-e^{-s\pi/\beta}} = \frac{a\beta}{s^2+\beta^2} \coth \frac{s\pi}{2\beta}$$

yani,

$$Lf(t) = \frac{a\beta}{s^2+\beta^2} \coth \frac{s\pi}{2\beta}$$

olarak bulunur (bkz. 1, Bölüm 5.4 ve 1.14). ○

---

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 5.5 için)

1. Dallarıyla verilmiş aşağıdaki fonksiyonları, basamak fonksiyonlarının yardımıyla yazıp görüntülerini bulun.

(a) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 5 \\ 2, & 5 \le t \end{cases}$

(b) $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 1 \\ -1, & 1 \le t < 2 \\ 0, & 2 \le t \end{cases}$

(c) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 1, & 1 \le t < 2 \\ -3, & 2 \le t < 3 \\ 4, & 3 \le t \end{cases}$

(d) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 1, & 1 \le t < 3 \\ 0, & 3 \le t \end{cases}$

(e) $f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t < 1 \\ 4-2t, & 1 \le t < 2 \\ 0, & 2 \le t \end{cases}$

(f) $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t < 1 \\ 1, & 1 \le t < 2 \\ 4-t, & 2 \le t < 3 \\ 0, & 3 \le t \end{cases}$

2. Aşağıdaki fonksiyonların görüntülerini bulun.

(a) $u(t-\beta)\cos(t-\beta)$

(b) $u(t-\beta)\sin^2(t-\beta)$

(c) $u(t-1)e^{3t-2}$

(d) $u(t-2)e^{2t-3}$

(e) $u(t-1)(t+3)$ (f) $u(t-2)t^2$

3. Aşağıdaki fonksiyonların ters Laplace dönüşümlerini bulun.

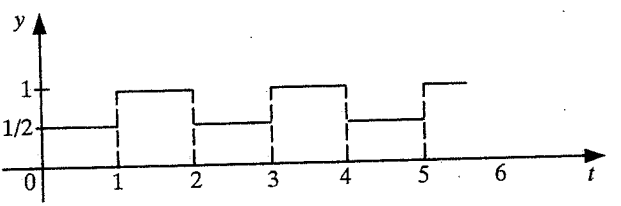
(a) $\dfrac{e^{-3s}}{s}$ (b) $\dfrac{e^{-5s}}{s+3}$ (c) $\dfrac{e^{-2s}}{s^2+9}$

(d) $\dfrac{e^{-3s}}{s(s-2)}$ (e) $\dfrac{1}{s}(2-3e^{-s}+e^{-3s})$

(f) $\dfrac{1}{s^4}+\dfrac{1}{(s+3)^4}e^{-2s}$ (g) $\dfrac{1}{s}(e^{-s}-2e^{-2s}+2e^{-3s}-e^{-4s})$

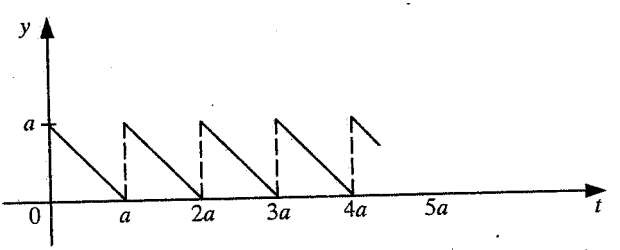
4. Şekil 31'de verilen devirli fonksiyonların görüntülerini bulun.

(a)



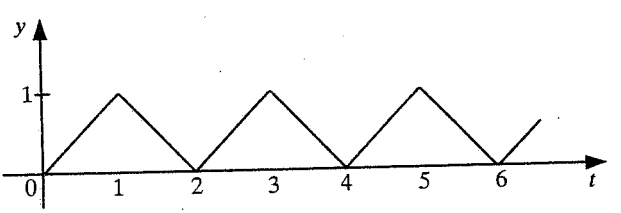

**Şekil 31a**

(b)



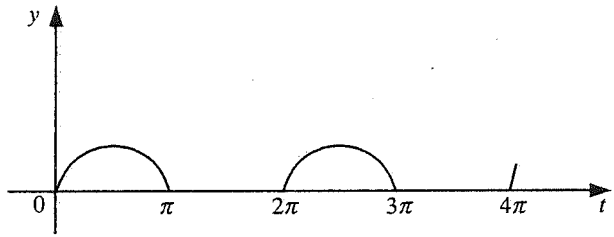

**Şekil 31b**

(c)




**Şekil 31c**

(d)




**Şekil 31*d***

5. (6) formülünü,

(a) $f(t) = \sin \beta t \quad (T = \frac{2\pi}{\beta})$ (b) $f(t) = \cos \beta t \quad (T = \frac{2\pi}{\beta})$

fonksiyonları için doğrulayın.

6. $T$ devirli olup $[0,T)$ aralığında analitik ifadesi aşağıdaki eşitliklerle verilen fonksiyonların görüntülerini bulun.

(a) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t < \pi \\ 0, & \pi \le t < T \end{cases}$ (b) $f(t) = \begin{cases} a, & 0 \le t < b \\ -a, & b \le t < 2b \end{cases} \quad T = 2b$

(c) $f(t) = \begin{cases} (a/b)t, & 0 \le t < b \\ -(a/b)t, & b \le t < 2b \end{cases} \quad T = 2b$

## 5.6 SABİT KATSAYILI DOĞRUSAL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Sabit katsayılı $n$. mertebeden doğrusal diferansiyel denklem için,

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t), \quad (t > 0) \tag{1}$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \tag{2}$$

başlangıç değer problemini ele alalım ($a_i = sb$, $i = \overline{(0,n)}$, $a_0 \neq 0$). Burada $f(t)$ bilinen, $y(t)$ ise aranan fonksiyonlardır. $f(t), y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)$ fonksiyonlarının Teorem 1'in (bkz. Bölüm 5.1) koşullarını sağladığını varsayalım.

(1), (2) problemini Laplace dönüşümünün yardımıyla çözelim. Bunun için $f(t) \leftarrow: F(s), y(t) \leftarrow: \bar{y}(s)$ kabul edip probleme Laplace dönüşümünü uygularsak,

$$L[a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y] = Lf(t)$$

yani,

$$a_0\left[s^n\bar{y}(s) - s^{n-1}y_0 - s^{n-2}y_0' - \ldots - sy_0^{(n-2)} - y_0^{(n-1)}\right] +$$

$$a_1\left[s^{n-1}\bar{y}(s) - s^{n-2}y_0 - s^{n-3}y_0' - \ldots - sy_0^{(n-3)} - y_0^{(n-2)}\right] + \ldots +$$

$$a_{n-1}\left[s\bar{y}(s) - y_0\right] + a_n\bar{y}(s) = F(s)$$

buradan da,

$$\bar{y}(s)\left[a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n\right] = F(s) +$$

$$\left[a_0(s^{n-1}y_0 + s^{n-2}y_0' + \cdots + sy_0^{(n-2)} + y_0^{(n-1)}) + \right. \tag{3}$$

$$\left. a_1(s^{n-2}y_0 + s^{n-3}y_0' + \cdots + sy_0^{(n-3)} + y_0^{(n-2)}) + \cdots + a_{n-1}y_0\right]$$

elde ederiz.

(3) denklemine (1), (2) probleminin *görüntü denklemi* veya *operatör denklemi* denir.

Açık ki, operatör denklemin sol tarafındaki köşeli parantez içi ifade, $s$'nin kuvvetlerine göre $n$. dereceden çokterimlidir (bunu $P_n(s)$ ile gösterelim), sağ tarafındaki köşeli parantez içi ifadenin ise, $s$'nin kuvvetlerine göre $(n-1)$. dereceden çokterimlidir (bunu da $Q_{n-1}(s)$ ile gösterelim). Bu nedenle denklemi,

$$P_n(s)\bar{y}(s) = F(s) + Q_{n-1}(s)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan,

$$\bar{y}(s) = \frac{F(s)}{P_n(s)} + \frac{Q_{n-1}(s)}{P_n(s)} \qquad \text{veya} \qquad Ly(t) = \frac{F(s)}{P_n(s)} + \frac{Q_{n-1}(s)}{P_n(s)} \tag{4}$$

bulunur. (4) eşitliğiyle belirlenen $\bar{y}(s)$'ye (1), (2) probleminin *operatör çözümü* denir.

Başlangıç koşullarının $y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0$ şeklindeki özel durumunda, (4) denklemi,

$$\bar{y}(s) = \frac{F(s)}{P_n(s)} \qquad \text{veya} \qquad Ly(t) = \frac{F(s)}{P_n(s)} \tag{4*}$$

şeklini alır.

Özel $n = 2$ durumunda, (1), (2) problemi ve (4) formülü, sırasıyla

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = f(t) \tag{1*}$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_0' \tag{2*}$$

$$\bar{y}(s) = \frac{F(s)}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2} + \frac{a_0 y_0 s + a_0 y_0' + a_1 y_0}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2} \qquad (3^*)$$

şekline dönüşür.

Bulunan $\bar{y}(s)$ fonksiyonun ters Laplace dönüşümü, yani $y(t) = L^{-1}\bar{y}(s)$ fonksiyonu (1), (2) probleminin çözümüdür. $\bar{y}(s)$'nin ters Laplace dönüşümünü bulmak için (4) eşitliğinin sağ tarafı basit kesirlere ayrılır, yani görüntüler çizelgesinin uygulanabileceği şekle dönüştürülür ve uygulanır.

**Uyarı 1** Kimi durumlarda $F(s)$'nin somut şekli belli olmaz veya bulunan basit kesirlere görüntüler çizelgesi doğrudan uygulanamaz (örneğin, $\frac{1}{(s^2+\beta^2)^n}$ $(n \geq 2)$ tipi kesirlere). O halde, önce bürüm formülünü kullanmak elverişlidir (aşağıdaki (5) ve (7) problemlerinin çözümüne ve Örnek 1'in **(b)**, **(c)** ve **(d)** seçeneklerine bakın).

Somut örnek çözümüne geçmeden önce, zorunlu salınım denklemi için,

$$y'' + \lambda^2 y = f(t), \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0' \qquad (5)$$

genel başlangıç değer problemini çözelim.

(3*) formülünü kullanarak $(a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = \lambda^2)$ ele alınan problemin,

$$\bar{y}(s) = \frac{F(s)}{s^2+\lambda^2} + \frac{y_0 s + y_0'}{s^2+\lambda^2} \quad \text{yani} \quad \bar{y}(s) = \frac{F(s)}{s^2+\lambda^2} + \frac{y_0 s}{s^2+\lambda^2} + \frac{y_0'}{s^2+\lambda^2}$$

operatör çözümünü yazıp $\frac{1}{s^2+\lambda^2} :\to \frac{1}{\lambda}\sin\lambda t$, $\frac{s}{s^2+\lambda^2} :\to \cos\lambda t$ ve bürüm formülüne göre $F(s)\frac{1}{s^2+\lambda^2} :\to \frac{1}{\lambda}\int_0^t f(\tau)\sin\lambda(t-\tau)d\tau$ olduğunu göz önüne alırsak, (5) probleminin çözümünü,

$$y(t) = y_0 \cos\lambda t + \frac{y_0'}{\lambda}\sin\lambda t + \frac{1}{\lambda}\int_0^t f(\tau)\sin\lambda(t-\tau)d\tau \qquad (6)$$

olarak buluruz.

(6) formülüne (5) probleminin çözümü için *Cauchy formülü* denir. $y_0 = y_0' = 0$ özel durumunda (6) formülü,

$$y(t) = \frac{1}{\lambda}\int_0^t f(\tau)\sin\lambda(t-\tau)d\tau \qquad (6^*)$$

şeklini alır.

Benzer yolla,

$$y'' - \lambda^2 y = f(t), \qquad y(0) = y_0, y'(0) = y_0' \tag{7}$$

probleminin çözümü için,

$$y(t) = y_0 \cosh \lambda t + \frac{y_0'}{\lambda} \sinh \lambda t + \frac{1}{\lambda} \int_0^t f(\tau) \sinh \lambda(t-\tau) d\tau \tag{8}$$

formülünü, $y_0 = y_0' = 0$ özel durumunda ise,

$$y(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t f(\tau) \sinh \lambda(t-\tau) d\tau \tag{8*}$$

formülünü elde ederiz.

**Uyarı 2** Çözülecek problemde, denklemin sağ tarafı basamak fonksiyonu, gecikmiş fonksiyon veya devirli fonksiyon olabilir. Bu durumlarda da çözüm yukarıda açıklanan yöntemle bulunur.

---

**ÖRNEK 1** Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün.

**(a)** $y' + 5y = e^{-2t}$, $y(0) = 1$

**(b)** $y'' - y = \dfrac{1}{1+e^t}$, $y(0) = y'(0) = 0$

**(c)** $y'' + 4y = u(t-2)$, $y(0) = y'(0) = 0$

**(d)** $y'' + 2y' = t \sin t$, $y(0) = y'(0) = 0$

**(e)** $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{\sin t}{t}$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$

**(f)** $y'' + 2y' + 2y = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & 1 \le t < 2 \\ 1, & 2 \le t < 3 \\ 0, & 3 \le t \end{cases}$ $\quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

**(g)** $y'' - 4y = 2 + u(t-1)e^{t-1} - 5u(t-3)\sin 2(t-3)$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$

**(h)** $4y''' - 8y'' - y' - 3y = -8e^t$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$

○ **(a)** $e^{-2t} \leftarrow: \dfrac{1}{s+2}, y(t) \leftarrow: \overline{y}(s), y'(t) \leftarrow: s\overline{y}(s) - 1$ olduğunu göz önüne alıp, ele alınan problemin,

$$(s+5)\overline{y}(s) - 1 = \frac{1}{s+2}$$

operatör denklemini ve

$$\bar{y}(s)=\frac{1}{(s+2)(s+5)}+\frac{1}{s+5}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+5}\right)+\frac{1}{s+5}$$

operatör çözümünü yazalım. Buradan,

$$\bar{y}(s)=\frac{1}{3}\frac{1}{s+2}+\frac{2}{3}\frac{1}{s+5}:\rightarrow\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^{-5t}=y(t)$$

olur. Böylece, ele alınan problemin çözümü,

$$y(t)=\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{2}{3}e^{-5t}$$

olarak bulunur;

**(b)** (7) probleminde $\lambda=1$ ve $f(t)=\dfrac{1}{1+e^t}$ alıp ($F(s)$'nin somut şeklini bulmadan) doğrudan (8*) formülünü kullanarak, problemin çözümünü,

$$y(t)=\int_0^t\frac{\sinh(t-\tau)}{1+e^t}d\tau$$

şeklinde yazabiliriz. $\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ olduğunu göz önüne alıp buradan,

$$y(t)=\int_0^t\frac{\sinh(t-\tau)}{1+e^t}d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\frac{e^{t-\tau}-e^{-(t-\tau)}}{1+e^\tau}d\tau=\frac{1}{2}e^t\int_0^t\frac{e^{-\tau}}{1+e^\tau}d\tau-\frac{1}{2}e^{-t}\int_0^t\frac{e^\tau}{1+e^\tau}d\tau=$$

$$\frac{e^t}{2}[-e^{-t}-t+\ln(1+e^t)+1-\ln 2]-\frac{e^{-t}}{2}[\ln(1+e^t)-\ln 2]=$$

$$\frac{1}{2}[e^t(1-t)-1]+\ln\frac{e^t+1}{2}\sinh t$$

yani,

$$y(t)=\frac{1}{2}[e^t(1-t)-1]+\ln\frac{e^t+1}{2}\sinh t$$

olarak buluruz;

**(c)** $u(t-2)\leftarrow: e^{-2s}\dfrac{1}{s}$ olduğunu göz önüne alıp yine ele alınan problemin,

$$(s^2+4)\bar{y}(s)=e^{-2s}\frac{1}{s}$$

operatör denklemini yazalım. Buradan,

$$\bar{y}(s) = e^{-2s}\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1}{4}e^{-2s}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)$$

yazıp gecikmiş fonksiyonun ters Laplace dönüşümü formülüne göre (bkz. Bölüm 5.5), $e^{-2s}\frac{1}{s} :\to u(t-2)$, $e^{-2s}\frac{s}{s^2+4} :\to u(t-2)\cos 2(t-2)$ olduğunu göz önüne alırsak,

$$\bar{y}(s) :\to \frac{1}{4}u(t-2)[1-\cos 2(t-2)] = y(t)$$

elde ederiz. Böylece, ele alınan problemin çözümü,

$$y(t) = \frac{1}{4}u(t-2)[1-\cos 2(t-2)]$$

veya
$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2 \\ \frac{1}{4}[1-\cos 2(t-2)], & 2 \le t \end{cases}$$

olarak bulunur;

**(d)** $t\sin t \leftarrow: \frac{2s}{(s^2+1)^2}$ olduğunu göz önüne alıp ele alınan problemin operatör denklemini ve operatör çözümünü yazalım:

$$(s^2+2s)\bar{y}(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \quad \text{yani,} \quad \bar{y}(s) = \frac{2}{(s+2)(s^2+1)^2}$$

Sağ taraftaki rasyonel kesri,

$$\frac{2}{(s+2)(s^2+1)^2} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{(s^2+1)^2} + \frac{Ds+E}{s^2+1}$$

şeklinde basit kesirlere ayırıp $A = \frac{2}{25}$, $B = -\frac{2}{5}$, $C = \frac{4}{5}$, $D = -\frac{2}{25}$, $E = \frac{4}{25}$ ve

$$\frac{2}{(s+2)(s^2+1)^2} = \frac{2}{25}\frac{1}{s+2} - \frac{2}{5}\frac{s-2}{(s^2+1)^2} - \frac{2}{25}\frac{s-2}{s^2+1}$$

buluruz. Dolayısıyla,

$$Ly(t) = \bar{y}(s) = \frac{2}{25}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{5}\frac{2s}{(s^2+1)^2} + \frac{4}{5}\frac{1}{(s^2+1)^2} - \frac{2}{25}\frac{s}{s^2+1} + \frac{4}{25}\frac{1}{s^2+1}$$

olur. Burada,

$$\frac{1}{s+2} :\rightarrow e^{-2t}, \quad \frac{2s}{(s^2+1)^2} :\rightarrow t\sin t, \quad \frac{s}{s^2+1} :\rightarrow \cos t, \quad \frac{1}{s^2+1} :\rightarrow \sin t$$

ve bürüm formülüne göre $(F(p) = \Phi(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$, yani $f(t) = \varphi(t) = \sin t)$,

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} :\rightarrow \int_0^t \sin\tau \sin(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t [\cos(2\tau - t) - \cos t]d\tau = \frac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t$$

olduğunu göz önüne alırsak, problemin çözümünü

$$y(t) = \frac{2}{25}e^{-2t} - \frac{1}{5}t\sin t + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t\right) - \frac{2}{25}\cos t + \frac{4}{25}\sin t$$

yani,

$$y(t) = \frac{2}{25}e^{-2t} - \frac{1}{5}t\sin t - \frac{2}{5}t\cos t - \frac{2}{25}\cos t + \frac{14}{25}\sin t$$

olarak buluruz;

**(e)** Başlangıç koşullarını ve $\dfrac{\sin t}{t} \leftarrow: \dfrac{\pi}{2} - \arctan s$ olduğunu göz önüne alıp yine ele alınan problemin operatör denklemini ve operatör çözümünü yazalım:

$$(s^2 + 2s + 2)\bar{y}(s) - 1 = \frac{\pi}{2} - \arctan s \quad \text{yani}$$

$$\bar{y}(s) = \left(\frac{\pi}{2} - \arctan s\right)\frac{1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

Burada, kayma özelliğine göre $\dfrac{1}{(s+1)^2+1} :\rightarrow e^{-t}\sin t$ ve bürüm formülüne göre de,

$$\left(\frac{\pi}{2} - \arctan s\right)\frac{1}{(s+1)^2+1} :\rightarrow \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}e^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau)d\tau$$

olduğunu göz önüne alırsak, çözümü

$$y(t) = e^{-t}\sin t + \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}e^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau)d\tau$$

olarak buluruz;

(f) Önce, denklemin sağ tarafını bir eşitlikle,

$$f(t) = -1 + u(t-1) + u(t-2) - u(t-3)$$

şeklinde yazıp görüntüsünü bulalım:

$$f(t) \leftarrow: -\frac{1}{s}(1 - e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s})$$

Probleme Laplace dönüşümünü uyguladığımızda,

$$(s^2 + 2s + 2)\bar{y}(s) - 1 = -\frac{1}{s}(1 - e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s})$$

veya

$$\bar{y}(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} - (1 - e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s})\frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

olur. Son eşitlikte,

$$\frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 2} \qquad \left(A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = -1\right)$$

olduğunu göz önüne alıp onu

$$\bar{y}(s) = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} - \frac{1}{2}(1 - e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s})\left[\frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} - \frac{1}{(s+1)^2 + 1}\right]$$

şeklinde dönüştürelim. Burada kayma özelliğine göre,

$$\frac{1}{s} :\rightarrow 1, \qquad \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} :\rightarrow e^{-t}\cos t, \qquad \frac{1}{(s+1)^2 + 1} :\rightarrow e^{-t}\sin t$$

olduğunu göz önüne alıp gecikmiş fonksiyonun ters Laplace dönüşümü formülünü uygularsak, problemin çözümünü,

$$y(t) = e^{-t}\sin t - \frac{1}{2}(1 - e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t)$$

$$+ \frac{1}{2}u(t-1)\left[1 - e^{-(t-1)}\cos(t-1) - e^{-(t-1)}\sin(t-1)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}u(t-2)\left[1 - e^{-(t-2)}\cos(t-2) - e^{-(t-2)}\sin(t-2)\right]$$

$$-\frac{1}{2}u(t-3)\left[1-e^{-(t-3)}\cos(t-3)-e^{-(t-3)}\sin(t-3)\right]$$

olarak buluruz;

(g) Gecikmiş fonksiyonun Laplace dönüşümüne göre,

$$2+u(t-1)e^{t-1}-5u(t-3)\sin 2(t-3) \leftarrow: \frac{2}{s}+\frac{e^{-s}}{s-1}-\frac{10e^{-3s}}{s^2+4}$$

olduğunu göz önüne alıp ele alınan problemin operatör denklemini,

$$(s^2-4)\overline{y}(s)=\frac{2}{s}+\frac{e^{-s}}{s-1}-\frac{10e^{-3s}}{s^2+4}+s+2$$

olarak buluruz. Buradan,

$$\overline{y}(s)=\frac{2}{s(s^2-4)}+\frac{e^{-s}}{(s-1)(s^2-4)}-\frac{10e^{-3s}}{(s^2+4)(s^2-4)}+\frac{s+2}{s^2-4}$$

ve basit kesirlere ayırma yoluyla

$$\overline{y}(s)=\frac{1}{2}\frac{s}{s^2-4}-\frac{1}{2}\frac{1}{s}+e^{-s}\left(-\frac{1}{3}\frac{1}{s-1}+\frac{1}{3}\frac{s+1}{s^2-4}\right)$$

$$-\frac{5}{4}e^{-3s}\left(\frac{1}{s^2-4}-\frac{1}{s^2+4}\right)+\frac{s}{s^2-4}+\frac{2}{s^2-4}$$

sonuçta da,

$$\overline{y}(s)=\frac{3}{2}\frac{s}{s^2-4}+\frac{2}{s^2-4}-\frac{1}{2}\frac{1}{s}-\frac{1}{3}e^{-s}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{s}{s^2-4}-\frac{1}{s^2-4}\right)$$
$$-\frac{5}{8}e^{-3s}\left(\frac{2}{s^2-4}-\frac{2}{s^2+4}\right)$$

eşitliğini elde ederiz.

Yeniden son eşitlikte görüntüler çizelgesini ve gecikmiş fonksiyonun ters Laplace dönüşümü formülünü kullanırsak, ele alınan problemin çözümünü,

$$y(t)=\frac{3}{2}\cosh 2t+\sinh 2t-\frac{1}{2}$$
$$-\frac{1}{3}u(t-1)\left[e^{t-1}-\cosh 2(t-1)-\frac{1}{2}\sinh 2(t-1)\right]$$

$$-\frac{5}{8}u(t-3)[\sinh 2(t-3)-\sin 2(t-3)]$$

olarak buluruz;

**(h)** $e^t \leftarrow: \frac{1}{s-1}$ olduğunu göz önüne alıp benzer yolla,

$$(4s^3-8s^2-s-3)\bar{y}(s) = -\frac{8}{s-1}+4s^2-4s-5$$

$$(4s^3-8s^2-s-3)\bar{y}(s) = \frac{4s^3-8s^2-s-3}{s-1}$$

$$\bar{y}(s) = \frac{1}{s-1}$$

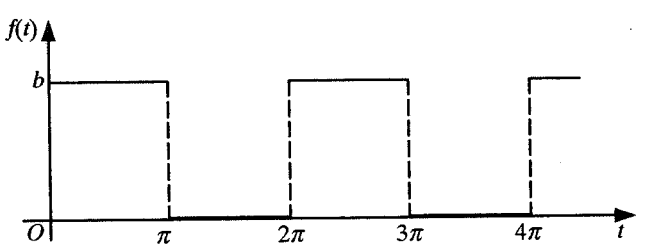
buradan da, $y(t) = e^t$ buluruz. ○

---

**ÖRNEK 2** Grafiği Şekil 32'de verilen $f(t)$ fonksiyonu için aşağıdaki başlangıç değer problemini çözün.

$$y'' + y = f(t),\ y(0) = 1, y'(0) = 0$$

○ Ele alınan problem için $f(t)$ fonksiyonunun, $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli, $\forall r > 0$ dereceden sınırlı ve $2\pi$ devirli fonksiyon olduğu şekilden görülmektedir. Bu nedenle, şekline bağlı olarak, $f(t)$ fonksiyonunun analitik ifadesini yazıp Laplace dönüşümünü uygulayabiliriz ( $y(t) \leftarrow: \bar{y}(s)$ olsun).




**ŞEKİL 32**

Şekle göre, $f(t)$ fonksiyonu

$$f(t) = b - bu(t-\pi) + bu(t-2\pi) - \cdots + (-1)^n bu(t-n\pi) + \cdots$$

biçiminde yazılabilir ve görüntüsü de

$$Lf(t) = b\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-\pi s} + \frac{1}{s}e^{-2\pi s} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{s}e^{-n\pi s} + \cdots\right)$$

olur. Bunu göz önüne alıp problemin operatör denklemini ve operatör çözümünü yazalım:

$$s^2\bar{y}(s) - s + \bar{y}(s) = b\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-\pi s} + \frac{1}{s}e^{-2\pi s} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{s}e^{-n\pi s} + \cdots\right),$$

$$\bar{y}(s) = \frac{s}{s^2+1} + b\left[\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) - \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right)e^{-\pi s}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right)e^{-2\pi s} - \cdots + (-1)^n\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right)e^{n\pi s} + \cdots\right]$$

$$\frac{1}{s} :\to 1, \quad \frac{s}{s^2+1} :\to \cos t, \quad \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right)e^{-n\pi s} :\to u(t-n\pi)[1-\cos(t-n\pi)]$$

olduğunu $(n = \overline{1,\infty})$ göz önüne alıp son eşitliğe ters Laplace dönüşümünü uygularsak, problemin çözümünü,

$$y(t) = \cos t + b\{(1-\cos t) - u(t-\pi)[1-\cos(t-\pi)]$$
$$+ u(t-2\pi)[1-\cos(t-2\pi)] - \cdots + (-1)^n u(t-n\pi)[1-\cos(t-n\pi)] + \cdots\}$$

veya

$$y(t) = b + (1-b)\cos t - b\{u(t-\pi)[1-\cos(t-\pi)]$$
$$- u(t-2\pi)[1-\cos(t-2\pi)] + \cdots + (-1)^{n-1}u(t-n\pi)[1-\cos(t-n\pi)] + \cdots\}$$

olarak buluruz $(b \in R)$.

Özel olarak $b = 1$ durumunda, çözüm

$$y(t) = 1 - u(t-\pi)[1-\cos(t-\pi)] + u(t-2\pi)[1-\cos(t-2\pi)]$$
$$- \cdots + (-1)^n u(t-n\pi)[1-\cos(t-n\pi)] + \ldots$$

olur. ○

---

**Uyarı 3** Laplace dönüşümünün yardımıyla sabit katsayılı doğrusal diferansiyel denklemlerin genel çözümleri de bulunabilir. Bunun için, başlangıç değerleri yerine keyfi sabitler alıp Laplace dönüşümünü uygulamak yeterlidir.

**ÖRNEK 3** Aşağıdaki denklemlerin genel çözümlerini bulun.

**(a)** $y'' + 2y' + 5y = 5e^{-t}\cos 2t$ **(b)** $y'' + 4y' + 3y = t + u(t-2)e^{-(t-2)}$

○ **(a)** $y(0) = C_1, y'(0) = C_2$ kabul edip denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümünü alırsak,

$$(s^2 + 2s + 5)\overline{y}(s) - C_1 s - C_2 - 2C_1 = \frac{5(s+1)}{(s+1)^2 + 4}$$

olur. Buradan, $\overline{y}(s)$'nin ifadesini yazıp görüntüler çizelgesinin yardımıyla

$$\overline{y}(s) = C_1 \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} + (C_1 + C_2)\frac{1}{(s+1)^2 + 4} + 5\frac{s+1}{[(s+1)^2 + 4]^2} :\rightarrow$$

$$C_1 e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}(C_1 + C_2)e^{-t}\sin 2t + \frac{5}{4}e^{-t}t\sin 2t$$

yani,

$$y(t) = C_1 e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}(C_1 + C_2)e^{-t}\sin 2t + \frac{5}{4}e^{-t}t\sin 2t$$

buluruz (işlemi yaparken, görüntünün türevi formülüne ve kayma özelliğine göre $\dfrac{s+1}{[(s+1)^2 + 4]^2} :\rightarrow \dfrac{1}{4}e^{-t}t\sin 2t$ olduğu göz önüne alınmıştır);

**(b)** Yine $y(0) = C_1, y'(0) = C_2$ kabul edip operatör denklemini yazalım:

$$(s^2 + 4s + 3)\overline{y}(s) = C_1 s + 4C_1 + C_2 + \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s+1}$$

Buradan,

$$\overline{y}(s) = \frac{C_1 s + 4C_1 + C_2}{(s+3)(s+1)} + \frac{1}{s^2(s+3)(s+1)} + \frac{e^{-2s}}{(s+3)(s+1)^2}$$

daha sonra da, basit kesirlere ayırma yöntemiyle,

$$\overline{y}(s) = -\frac{C_1 + C_2}{2}\frac{1}{s+3} + \frac{3C_1 + C_2}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s^2} - \frac{9}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{18}\frac{1}{s+3}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + e^{-2s}\left(\frac{1}{4}\frac{1}{s+3} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+1}\right)$$

elde ederiz. Son eşitliğe görüntüler çizelgesini ve gecikmiş fonksiyonun ters Laplace dönüşümü formülünü uygularsak, verilen denklemin genel çözümünü,

$$y(t) = -\frac{C_1 + C_2}{2}e^{-3t} + \frac{3C_1 + C_2}{2}e^{-t} + \frac{1}{3}t - \frac{9}{4} - \frac{1}{18}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t}$$
$$+ u(t-2)\left[\frac{1}{4}e^{-3(t-2)} + \frac{1}{2}(t-2)e^{-(t-2)} - \frac{1}{4}e^{-(t-2)}\right]$$

veya

$$y(t) = -\frac{1}{2}\left(C_1 + C_2 + \frac{1}{9}\right)e^{-3t} + \frac{1}{2}(3C_1 + C_2 + 1)e^{-t} + \frac{1}{3}t - \frac{9}{4}$$
$$+ u(t-2)\left[\frac{1}{4}e^{-3(t-2)} + \frac{1}{2}(t-2)e^{-(t-2)} - \frac{1}{4}e^{-(t-2)}\right]$$

olarak buluruz. ○

---

Şimdi, Laplace dönüşümünü uygulayarak, elektrik devresinin incelenmesiyle ilgili bir örnek çözelim.

---

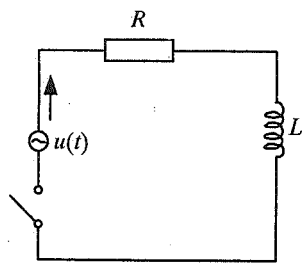
**ÖRNEK 4** Kendi indüklemesi $(L)$ ve direnci $(R)$ olan, ardarda bağlanmış elektrik devresine $T$ devirli e.m.k. $(v(t) = at,\ 0 \le t < T)$ eklendiğinde, $i(0) = i_0$ başlangıç koşulunu, devrede devirli akım olacak şekilde belirleyin ($i = i(t)$, akım şiddetidir. Şekil 33).

○ Kirchov'un ikinci yasasına göre,

$$Li'(t) + Ri(t) = v(t) \qquad \text{veya} \qquad i'(t) + ki(t) = \frac{1}{L}v(t) \quad \left(k = \frac{R}{L}\right) \tag{1e}$$

yazılabilir.

$v(t)$ fonksiyonunun başlangıç devirdeki $(0 \le t < T)$ değerini $v_0(t)$ ile gösterip, dönüştürülmüş birim basamak fonksiyonunun yardımıyla onu,




**ŞEKİL 33**

$$v_0(t) = at - u(t-T)at$$

yani,

$$v_0(t) = at - au(t-T)(t-T) - aTu(t-T)$$

şeklinde yazalım. Burada, $v_0(t) \leftarrow: V_0(s)$ kabul edip her iki tarafa Laplace dönüşümünü uygularsak,

$$V_0(s) = \frac{a}{s^2} - \frac{ae^{-sT}}{s^2} - \frac{aT}{s}e^{-sT} \quad \text{veya} \quad V_0(s) = \frac{a(1-e^{-sT})}{s^2} - \frac{aT}{s}e^{-sT} \quad (2e)$$

elde ederiz.

$v(t) \leftarrow: V(s)$ kabul edip devirli fonksiyonun görüntü formülüne göre (bkz. Bölüm 5.5),

$$V(s) = \frac{V_0(s)}{1-e^{-sT}}$$

yazabiliriz. Burada, (2e) eşitliğini göz önüne alırsak,

$$V(s) = \frac{a}{s^2} - \frac{aT}{s}\frac{e^{-sT}}{1-e^{-sT}} \quad (3e)$$

olur.

$i(t) \leftarrow: \dot{I}(s)$ kabul edersek, $i'(t) \leftarrow: s\dot{I}(s) - i_0$ olur. Bunları göz önüne alıp (1e) denkleminin operatör denklemini yazalım:

$$s\dot{I}(s) - i_0 + k\dot{I}(s) = \frac{1}{L}V(s) \quad \text{veya} \quad \dot{I}(s) = \frac{i_0}{s+k} + \frac{1}{L(s+k)}V(s) \quad (4e)$$

(3e) eşitliğini (4e)'de göz önüne alırsak,

$$\dot{I}(s) = \frac{i_0}{s+k} + \frac{1}{L(s+k)}\left(\frac{a}{s^2} - \frac{aT}{s}\frac{e^{-sT}}{1-e^{-sT}}\right)$$

yani,

$$\dot{I}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\left[\frac{i_0(1-e^{-sT})}{s+k} + \frac{a(1-e^{-sT})}{Ls^2(s+k)} - \frac{aTe^{-sT}}{Ls(s+k)}\right] \quad (5e)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada,

$$F(s) = \frac{i_0(1-e^{-sT})}{s+k} + \frac{a(1-e^{-sT})}{Ls^2(s+k)} - \frac{aTe^{-sT}}{Ls(s+k)} \quad (6e)$$

kabul edersek,

$$\dot{I}(s) = \frac{F(s)}{1-e^{-sT}} \tag{7e}$$

olur.

$F(s) :\rightarrow f(t)$ kabul edelim. Devrede devirli akımın olması için, $f(t)$ fonksiyonunun

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t), & 0 \le t < T \\ 0, & t \ge T \end{cases}$$

şeklinde olması gerekir. $0 \le t < T$ için,

$$f_0(t) \leftarrow: \frac{i_0}{s+k} + \frac{a}{Ls^2(s+k)}$$

olduğu (5e) eşitliğinden görülmektedir. Burada,

$$\frac{1}{s^2(s+k)} = \frac{1}{k}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{k^2}\frac{1}{s} + \frac{1}{k^2}\frac{1}{s+k}$$

olduğunu göz önüne alıp ters Laplace dönüşümünü uygularsak,

$$f_0(t) = i_0 e^{-kt} + \frac{at}{Lk} + \frac{a}{Lk^2}(e^{-st} - 1) \tag{8e}$$

buluruz.

(6e) eşitliğini,

$$F(s) = i_0\left(\frac{1}{s+k} - \frac{e^{-sT}}{s+k}\right) + \frac{a}{Lk}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-sT}}{s^2}\right)$$
$$+ \frac{a}{Lk^2}\left[\left(\frac{1}{s+k} - \frac{1}{s}\right) - \left(\frac{1}{s+k} - \frac{1}{s}\right)e^{-sT}\right] + \frac{aT}{Lk}\left(\frac{1}{s+k} - \frac{1}{s}\right)e^{-sT}$$

şeklinde dönüştürüp $t \ge T$ için gecikme teoremini uygularsak,

$$f(t) = i_0(e^{-kt} - e^{-k(t-T)}) + \frac{a}{Lk}[t - (t-T)]$$
$$+ \frac{a}{Lk^2}(e^{-kt} - 1 - e^{-k(t-T)} + 1) + \frac{aT}{Lk}(e^{-k(t-T)} - 1)$$

sadeleştirme yapıldığında ise,

$$f(t) = e^{-kt}\left[i_0(1-e^{kT}) + \frac{a}{Lk^2}(1-e^{kT}) + \frac{aT}{Lk}e^{kT}\right]$$

elde ederiz. Burada $t \ge T$ için $f(t) = 0$ olduğunu göz önüne alırsak,

$$i_0(1-e^{kT})+\frac{a}{Lk^2}(1-e^{kT})+\frac{aT}{Lk}e^{kT}=0$$

yani
$$i_0=-\frac{a}{Lk^2}+\frac{a}{Lk}\frac{1}{1-e^{-kT}} \tag{9e}$$

olur. Demek ki, (9e) eşitliğiyle belirlenen başlangıç koşulu için devrede devirli akım oluşur. $i_0$ 'ın ifadesini (8e) eşitliğinde yazıp,

$$f_0(t)=\frac{aT}{Lk}\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{kT}+\frac{e^{-kT}}{1-e^{-kT}}\right)$$

şeklinde, istenen $T$ devirli akımın $0 \le t < T$ aralığındaki değerini buluruz. O

---

**Uyarı 4** Kimi durumlarda $f(t)$ fonksiyonunun (sağ tarafın) görüntüsünü bulmak zordur veya bulunamaz. O halde, (1), (2) probleminin çözümü için, Uyarı 1'de söylenenin dışında, *Duhamel formülü* adı verilen formülden de yararlanmak elverişlidir (bkz. Bölüm 5.7).

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 5.6 için)

1. Laplace dönüşümünü veya Cauchy formülünü kullanarak aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün.

   **(a)** $y'+y=e^{-t}, y(0)=1$

   **(b)** $y'-y=\sin^2 t, y(0)=0$

   **(c)** $y''+y=1, y(0)=-1, y'(0)=0$

   **(d)** $y''+2y'+y=t, y(0)=y'(0)=0$

   **(e)** $y''+y=\cos t, y(0)=0, y'(0)=1$

   **(f)** $y'''-2y''+y'=4, y(0)=1, y'(0)=2, y''(0)=-2$

   **(g)** $y^{(4)}+2y''+y=0, y(0)=0, y'(0)=1, y''(0)=2, y'''-3$

   **(h)** $y'''-y''=0, y(0)=y_0, y'(0)=y_0', y''(0)=y_0''$

   **(i)** $y'''+y'=t, y(0)=0, y'(0)=-1, y''(0)=0$

   **(j)** $y''-2y'+2y=1, y(0)=y'(0)=0$

   **(k)** $y'''+y''=\sin t, y(0)=y'(0)=1, y''(0)=0$

(l) $y'' + y = \cos t, y(0) = -1, y'(0) = 1$

(m) $y'' + 4y = t, y(0) = 1, y'(0) = 0$

(n) $y''' + y' = e^t, y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 0$

(o) $y'' + y = 2\sin t, y(0) = 1, y'(0) - 1$

(p) $y'' + 4y = 2\cos t \cos 3t, y(0) = y'(0) = 0$

(r) $y'' + y = te^t + 4\sin t, y(0) = y'(0) = 0$

(s) $y'' + n^2 y = a\sin(nt + \alpha), y(0) = y'(0) = 0$

(t) $y^{(4)} + y''' = \cos t, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = \gamma$

2. Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün.

(a) $y' + y = u(t-3), y(0) = 1$

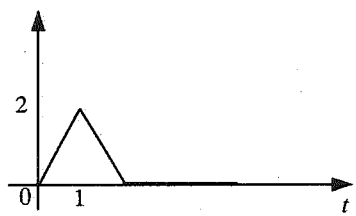
(b) $y' = 1 + 2u(t-2), y(0) = 1$

(c) $y'' + y = u(t-\alpha) - u(t-2\alpha), y(0) = 0, y'(0) = 1$

(d) $y'' + 4y = u(t-2\pi)\sin t, y(0) = 1, y'(0) = 0$

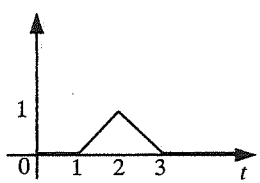
(e) $y'' + y' = t + 3u(t-1), y(0) = 0, y'(0) = 2$

(f) $y'' + 4y = f(t), y(0) = y'(0) = 0$ (Şekil 34)




**Şekil 34**

(g) $y'' + 9y = f(t), y(0) = 0; y'(0) = 1$ (Şekil 35)




**Şekil 35**

(h) $y'' - 2y' + 2y = 1 + u(t-2), y(0) = y'(0) = 0$

(i) $y'' + \beta^2 y = a[1 - u(t - t_0)], y(0) = y'(0) = 0$

3. Aşağıdaki denklemlerin genel çözümünü bulun.

(a) $y'' - y = e^{-t}$ (b) $y'' - y = \cosh t$

(c) $y'' + y = 4t\cos t$ (d) $y'' + 5y' + 6y = e^{-t} + e^{-3t}$

(e) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^t$ (f) $y^{(4)} - y = te^t + \cos t$

(g) $y'' + y' = 1 + u(t-1)$ (h) $y'' + 3y' + 2y = 3 - 2u(t-1) + u(t-2)$

(i) $y'' - y = e^t + 2u(t-3)$

## 5.7* DUHAMEL FORMÜLÜ VE UYGULANMASI

### Duhamel Formülü

$[0,\infty)$ aralığında $f(t)$ fonksiyonu sürekli, $\varphi(t)$ fonksiyonu ise sürekli türeve sahipse, o zaman,

$$sF(s)\Phi(s) :\longrightarrow f(t)\varphi(0) + \int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)d\tau \tag{1}$$

formülü doğrudur ($F(s) :\longrightarrow f(t)$, $\Phi(s) :\longrightarrow \varphi(t)$ 'dir).

❒ (1) formülünü kanıtlamak için,

$$F(s)\Phi(s) :\longrightarrow \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau$$

bürüm formülünü yazıp sağ tarafın $t$ parametresine göre türevi için doğru olan,

$$\left(\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau\right)'_t = f(t)\varphi(0) + \int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)d\tau$$

eşitliğini ve başlangıç fonksiyonunun türev formülüne göre,

$$\left(\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau\right)'_t \longleftarrow: sF(s)\Phi(s)$$

olduğunu göz önüne almak yeterlidir ($\psi(t) = \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau$ başlangıç fonksiyonunun türevini aldığımızda $\psi(0) = 0$ olduğunu kullandık). ❑

Duhamel formülündeki $\int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)d\tau$ integraline *Duhamel integrali* denir.

Şimdi, Duhamel formülünün yardımıyla başlangıç değerleri sıfır olan,

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(t), \quad (a_0 \neq 0,\ t > 0) \tag{2}$$

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0 \tag{3}$$

probleminin çözümünü bulalım.[1]

Bunun için, (2), (3) probleminin yanısıra, sol tarafı (2) denkleminin sol tarafıyla aynı, sağ tarafı ise 1'e eşit olan denklem için,

$$\begin{gathered} a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + a_2x^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_nx = 1, \quad (t > 0) \\ x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-1)}(0) = 0 \end{gathered} \tag{4}$$

*yardımcı problemini* de ele alalım.

$\bar{y}(s) :\to y(t)$, $\bar{x}(s) :\to x(t)$, $F(s) :\to f(s)$ ve $a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \ldots + a_{n-1}s + a_n = P_n(s)$ kabul edip her iki probleme Laplace dönüşümünü uygularsak, sırasıyla

$$\bar{y}(s) = \frac{F(s)}{P_n(s)} \tag{5}$$

$$\bar{x}(s) = \frac{1}{sP_n(s)} \tag{6}$$

olur. (6) eşitliğini $\frac{1}{P_n(s)} = s\bar{x}(s)$ şeklinde yazıp (5)'te göz önüne alırsak,

$$\bar{y}(s) = sF(s)\bar{x}(s) \tag{7}$$

olur. Sağ tarafta Duhamel formülünü uygularsak,

$$sF(s)\bar{x}(s) :\to f(t)\ x(0) + \int_0^t f(\tau)x'(t-\tau)d\tau \quad \text{yani,}$$

$$sF(s)\bar{x}(s) :\to \int_0^t f(\tau)x'(t-\tau)d\tau$$

---

[1] $y(t) = z(t) + y_0 + y_0't + y_0''t^2 + \ldots + y_0^{(n-1)}t^{n-1}$ yerine koymasının yardımıyla, başlangıç değerleri her zaman sıfır durumuna dönüştürülebilir.

olduğundan,

$$\bar{y}(s) :\rightarrow \int_0^t f(\tau)x'(t-\tau)d\tau \quad \text{veya} \quad y(t) = \int_0^t f(\tau)x'(t-\tau)d\tau \tag{8}$$

olur. Yani, (2), (3) probleminin çözümünü (4) probleminin çözümünün yardımıyla bulmuş oluruz. *Demek ki, yardımcı probleminin çözümünü kullanarak, değişik $f(t)$'ler için (2), (3) probleminin çözümü doğrudan bulunabilir.* Yardımcı (4) probleminin çözümü ise $x(t) = L^{-1}\bar{x}(s)$ olmak üzere, (6) eşitliğinin yardımıyla bulunur.

**Uyarı 1** $y'' + \lambda^2 y = f(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$ problemi için yardımcı problem $x'' + \lambda^2 x = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$, bunun çözümü ise $x(t) = \frac{1}{\lambda^2}(1 - \cos\lambda t)$ olduğundan, (8) formülü,

$$y(t) = \frac{1}{\lambda}\int_0^t f(\tau)\sin\lambda(t-\tau)d\tau \tag{8*}$$

şeklini alır. Yani, sözü edilen problem için (8) formülü Cauchy formülüyle çakışır (bkz. Bölüm 5.6).

Benzer biçimde, $y'' - \lambda^2 y = f(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$ problemi için de yardımcı problem $x'' - \lambda^2 x = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$, çözümü ise $x(t) = \frac{1}{\lambda^2}(\cosh\lambda t - 1)$ olduğundan, (8) formülü Cauchy formülüyle çakışır ve

$$y(t) = \frac{1}{\lambda}\int_0^t f(\tau)\sinh\lambda(t-\tau)d\tau \tag{8**}$$

şeklini alır.

---

**ÖRNEK 1** Aşağıdaki problemleri Duhamel formülünün yardımıyla çözün.

**(a)** $y'' - 2y' = t^2 e^t$, $y(0) = y'(0) = 0$

**(b)** $y'' - y = \tanh t$, $y(0) = y'(0) = 0$

○ **(a)** Önce, $x'' - 2x' = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$ yardımcı problemini çözelim. $x(t) \leftarrow: \bar{x}(s)$ kabul edip (6) eşitliğine göre,

$$\bar{x}(s) = \frac{1}{s^2(s-2)}$$

yazabiliriz. Sağ taraftaki kesri,

$$\frac{1}{s^2(s-2)}=\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{C}{s-2},\qquad A=-\frac{1}{2},\quad B=-\frac{1}{4},\quad C=\frac{1}{4}$$

şeklinde basit kesirlere ayırıp,

$$\bar{x}(s)=-\frac{1}{2}\frac{1}{s^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{s}+\frac{1}{4}\frac{1}{s-2}$$

elde ederiz. Burada $\frac{1}{s^2}:\to t, \frac{1}{s}:\to 1. \frac{1}{s-2}:\to e^{2t}$ olduğunu göz önüne alırsak,

$$x(t)=-\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{2t}$$

olarak bulunur.

Şimdi, $x'(t)=\frac{1}{2}(e^{2t}-1)$ olduğunu göz önüne alıp (8) formülünü uygulayalım $(f(t)=t^2e^t)$:

$$\begin{aligned}y(t)&=\int_0^t \tau^2e^{\tau}\frac{1}{2}(e^{2(t-\tau)}-1)d\tau=\frac{1}{2}e^{2t}\int_0^t \tau^2e^{-\tau}d\tau-\frac{1}{2}\int_0^t \tau^2e^{\tau}d\tau\\&=\frac{1}{2}e^{2t}(-t^2e^{-t}-2te^{-t}-2e^{-t}+2)-\frac{1}{2}(t^2e^t-2te^t+2e^t-2)\\&=e^{2t}-t^2e^t-2e^t+1\end{aligned}$$

Böylece, ele alınan problemin çözümünü

$$y(t)=e^{2t}-t^2e^t-2e^t+1$$

olarak buluruz;

**(b)** Ele alınan problem için (8) ve (8**) formülleri çakıştığından, doğrudan (8**) formülünü kullanırsak $(\lambda=1,\ f(t)=\tanh t)$,

$$\begin{aligned}y(t)&=\int_0^t \tanh\tau\sinh(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\frac{e^{\tau}-e^{-\tau}}{e^{\tau}+e^{-\tau}}(e^{t-\tau}-e^{-(t-\tau)})d\tau\\&=\frac{1}{2}e^t\left(\int_0^t\frac{d\tau}{e^{\tau}+e^{-\tau}}-\int_0^t\frac{e^{-2\tau}d\tau}{e^{\tau}+e^{-\tau}}\right)-\frac{1}{2}e^{-t}\left(\int_0^t\frac{e^{2\tau}d\tau}{e^{\tau}+e^{-\tau}}-\int_0^t\frac{d\tau}{e^{\tau}+e^{-\tau}}\right)\\&=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\int_0^t\frac{d\tau}{e^{\tau}+e^{-\tau}}-\frac{1}{2}e^t\int_0^t\frac{e^{-2\tau}}{e^{\tau}+e^{-\tau}}d\tau-\frac{1}{2}e^{-t}\int_0^t\frac{e^{2\tau}}{e^{\tau}+e^{-\tau}}d\tau\end{aligned}$$

yani,

$$y(t) = \cosh t \int_0^t \frac{d\tau}{e^{\tau}+e^{-\tau}} - \frac{1}{2}e^{t}\int_0^t \frac{e^{-2\tau}}{e^{\tau}+e^{-\tau}}d\tau - \frac{1}{2}e^{-t}\int_0^t \frac{e^{2\tau}}{e^{\tau}+e^{-\tau}}d\tau \qquad (*)$$

olur.

(*) eşitliğinin sağ tarafındaki her üç integral, $e^{\tau} = \xi$ ($\tau = \ln\xi$, $d\tau = d\xi/\xi$, $\tau = 0 \Rightarrow \xi = 1$, $\tau = t \Rightarrow \xi = e^{t}$) yerine koymasının yardımıyla hesaplanabilir:

$$J_1 = \int_0^t \frac{d\tau}{e^{\tau}+e^{-\tau}} = \int_1^{e^t} \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \arctan\xi\Big|_1^{e^t} = \arctan e^{t} - \frac{\pi}{4}$$

$$J_2 = \int_0^t \frac{e^{-2\tau}}{e^{\tau}+e^{-\tau}}d\tau = \int_1^{e^t} \frac{d\xi}{\xi^2(1+\xi^2)} = \int_1^{e^t}\left(\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{1+\xi^2}\right)d\xi$$

$$= \left(-\frac{1}{\xi} - \arctan\xi\right)\Big|_1^{e^t} = -e^{-t} + 1 - \arctan e^{t} + \frac{\pi}{4}$$

$$J_3 = \int_0^t \frac{e^{2\tau}}{e^{\tau}+e^{-\tau}}d\tau = \int_1^{e^t} \frac{\xi^2 d\xi}{1+\xi^2} = \int_1^{e^t}\left(1 - \frac{1}{1+\xi^2}\right)d\xi$$

$$= (\xi - \arctan\xi)\Big|_1^{e^t} = e^{t} - 1 - \arctan e^{t} + \frac{\pi}{4}$$

$J_1, J_2$ ve $J_3$ 'ün ifadelerini (*) eşitliğinde yazıp çözümü

$$y(t) = \cosh t \cdot \left(\arctan e^{t} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}e^{t}\left(-e^{-t} + 1 - \arctan e^{t} + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$- \frac{1}{2}e^{-t}\left(e^{-t} - 1 - \arctan e^{t} + \frac{\pi}{4}\right)$$

ve sonuçta

$$y(t) = 2\cosh t \cdot \left(\arctan e^{t} - \frac{\pi}{4}\right) - \sinh t$$

olarak buluruz. ○

---

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 5.7 için)

**1.** Aşağıdaki problemleri Duhamel formülünün yardımıyla çözün.

**(a)** $y'' + 2y' + 2y = \sin t$, $y(0) = y'(0) = 0$

**(b)** $y'' + y = \dfrac{1}{2+\cos t}$, $y(0) = y'(0) = 0$

(c) $y'' - y = \dfrac{1}{1+e^t}$, $y(0) = y'(0) = 0$

(d) $y'' + y' = \cos t$, $y(0) = y'(0) = 0$

(e) $y'' - y = \sinh t$, $y(0) = y'(0) = 0$

(f) $y'' + y' = \dfrac{1}{2+\sin t}$, $y(0) = y'(0) = 0$

(g) $y'' - 2y' + y = \cosh t$, $y(0) = y'(0) = 0$

(h) $y''' + y' = e^t$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

(i) $y'' + y' = t$, $y(0) = y'(0) = 0$

## 5.8* DİRAC FONKSİYONLARI VE UYGULAMALARI

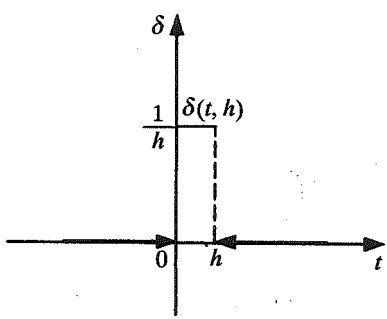
Önce, keyfi $h > 0$ parametresi için,

$$\delta_0(t,h) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}, & t \in [0,h) \\ 0, & t \in (-\infty,0) \cup [h,\infty) \end{cases}$$

yani,

$$\delta_0(t,h) = \frac{1}{h}[u(t) - u(t-h)] \tag{1}$$

şeklinde belirlenen $\delta_0(t,h)$ fonksiyonunu ele alalım (Şekil 36). $\delta_0(t,h)$ fonksiyonunu $h$ zaman süresince $\dfrac{1}{h}$ değerinde etki yapan kuvvet olarak yorumlayabiliriz. Keyfi $h > 0$ için,




ŞEKİL 36

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t,h)dt = \frac{1}{h}\int_0^h dt = 1$$

olduğundan, bu kuvvetin toplam etkisi (*kuvvetin şiddeti* de denir) 1'e eşittir. $h \to 0$ 'da $\delta_0(t,h)$ fonksiyonunun anlamsız olmasına rağmen, koşullu olarak $\lim\limits_{h\to 0} \delta_0(t,h)$ limitini $\delta_0(t)$ olarak gösterip,

$$\delta_0(t) = \lim_{h\to 0} \delta_0(t,h) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases} \tag{2}$$

kabul edelim. Buradan,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t)dt = 1$$

olduğu açıktır. (2) eşitliğiyle belirlenen $\delta_0(t)$ fonksiyonuna sıfır basamaklı *Dirac*[1] *fonksiyonu* veya *etki fonksiyonu* denir. Bu fonksiyon, $t = 0$ anında sonsuz büyük değerli, $t \neq 0$ içinse sıfır değerli kuvvet olarak yorumlanabilir.

Etki fonksiyonunun Laplace dönüşümü, $\delta_0(t,h)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümüyle

$$L\delta_0(t) = \lim_{h\to 0} L\delta_0(t,h)$$

şeklinde tanımlanabilir:

$$L\delta_0(t,h) = \frac{1}{h}[Lu(t) - Lu(t-h)] = \frac{1}{hs}(1 - e^{-hs})$$

ve

$$\lim_{h\to 0} L\delta_0(t,h) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{hs}(1 - e^{-hs}) = 1$$

olduğundan,

$$L\delta_0(t) = 1 \tag{3}$$

olur (son limiti hesaplarken L'Hôpital kuralını kullandık. Bkz. 1, Bölüm 4.1).

Etki fonksiyonunun Laplace dönüşümü olarak bulunan $\overline{\delta}_0(s) = 1$ fonksiyonu $s \to \infty$ 'da sıfıra yaklaşmıyor, yani $Lf(t) = F(s)$ görüntü fonksiyonunun $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$ özelliğine uymuyor. Ancak, $\delta_0(t)$ 'nin, görüntü fonksiyonunun diğer tüm özelliklerine sahip olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Örneğin, $\delta_0(t)$ için

---

[1] Paul Dirac (1900-1984) – 31 yaşında Kuantum Teorisindeki çalışmaları nedeniyle Nobel Ödülü kazanmış İngiliz fizikçi.

$$L\delta_0(t-t_0)=e^{-t_0 s} \qquad \text{veya} \qquad \delta_0(t-t_0) \leftarrow: e^{-t_0 s}$$

kayma özelliğinin sağlandığını gösterelim:

$$L\delta_0(t-t_0)=\lim_{h\to 0} L\delta_0(t-t_0,h)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}L[u(t-t_0)-u(t-t_0-h)]$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{s}e^{-t_0 s}-\frac{1}{s}e^{-(t_0+h)s}\right]=e^{-t_0 s}\lim_{h\to 0}\frac{1}{hs}(1-e^{-hs})=e^{-t_0 s}$$

yani,

$$L\delta_0(t-t_0)=e^{-t_0 s}$$

Dirac fonksiyonunun sahip olduğu aşağıdaki özelliklerin doğruluğunu kabul edelim.

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_0(t)dt=f(0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_0(t-t_0)dt=f(t_0)$
2. $\delta_0(-t)=\delta_0(t)$
3. $\delta_0(at)=\frac{1}{|a|}\delta_0(t) \quad (a\neq 0)$
4. $t=a_k \ (k=\overline{1,n})$ noktalarında $f(t)=0,\ f'(t)\neq 0$ ise, o zaman,

$$\delta_0(f(t))=\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta_0(t-a_k)}{|f'(a_k)|}$$

eşitliği doğrudur.

Yukarıdaki özelliklerde kullanılan $f(t)$ fonksiyonu, $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlı ve gerekli özelliklere sahip fonksiyondur.

Şimdi, $\delta_0(t,h)$ fonksiyonuna dayanarak, *n basamaklı* $(n\in N)$ *Dirac fonksiyonunu* $(\delta_n(t))$ tanımlayıp görüntüsünü bulalım. Bunun için önce,

$$\delta_1(t,h)=\frac{1}{h}[\delta_0(t,h)-\delta_0(t-h,h)] \tag{4}$$

eşitliğiyle $\delta_1(t,h)$ fonksiyonunu tanımlayıp $\delta_0(t)$'nin tanımına benzer olarak $\lim_{h\to 0}\delta_1(t,h)$ limitini *bir basamaklı Dirac fonksiyonu* $(\delta_1(t))$ olarak adlandıralım:

$$\delta_1(t)=\lim_{h\to 0}\delta_1(t,h) \tag{5}$$

Bu fonksiyonun görüntüsünü, yani $L\delta_1(t)$'yi bulmak için önce (1) eşitliğini kullanarak (4) eşitliğini,

$$\delta_1(t,h)=\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{h}[u(t)-u(t-h)]-\frac{1}{h}[u(t-h)-u(t-2h)]\right\}$$

$$=\frac{1}{h^2}[u(t)-2u(t-h)+u(t-2h)]=\begin{cases}1/h^2 & t\in[0,h)\\ -1/h^2 & t\in[h,2h)\\ 0 & t\in(-\infty,0)\cup[2h,\infty)\end{cases}$$

şeklinde yazıp görüntüsünü bulalım:

$$L\delta_1(t,h)=\frac{1}{h^2}[Lu(t)-2Lu(t-h)+Lu(t-2h)]=\frac{1}{h^2 s}(1-2e^{-hs}+e^{-2hs})$$

Buradan da,

$$L\delta_1(t)=\lim_{h\to 0}L\delta_1(t,h)=\lim_{h\to 0}\frac{1-2e^{-hs}+e^{-2hs}}{h^2 s}=s$$

yani,

$$L\delta_1(t)=s \quad \text{veya} \quad \delta_1(t)\longleftarrow: s \tag{6}$$

bulunur (son limiti hesaplarken, ardarda iki kere L'Hôpital kuralını kullandık).

Benzer biçimde,

$$\delta_2(t,h)=\frac{1}{h}[\delta_1(t,h)-\delta_1(t-h,h)] \quad \text{ve} \quad \delta_2(t)=\lim_{h\to 0}\delta_2(t,h)$$

kabul edip,

$$L\delta_2(t)=s^2 \qquad \text{veya} \qquad \delta_2(t)\longleftarrow: s^2,\ldots,$$

$$\delta_n(t,h)=\frac{1}{h}[\delta_{n-1}(t,h)-\delta_{n-1}(t-h,h)] \qquad \text{ve} \qquad \delta_n(t)=\lim_{h\to 0}\delta_n(t,h)$$

kabul edip,

$$L\delta_n(t)=s^n \qquad \text{veya} \qquad \delta_n(t)\longleftarrow: s^n$$

bulunabilir. Burada da $s, s^2,\ldots,s^n$ fonksiyonları, koşullu olarak, sırasıyla $\delta_1(t), \delta_2(t), \ldots, \delta_n(t)$ etki fonksiyonlarının görüntüleri olarak kabul edilir. Bu fonksiyonlar da, görüntü fonksiyonunun $\lim_{s\to\infty}F(s)=0$ özelliğine uymaz. Bütün bunlara rağmen, Matematiğe Dirac tarafından kazandırılan etki fonksiyonları, ani itiş problemlerinin öğrenilmesinde çok faydalıdır.

**ÖRNEK 1** Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün.

(a) $x''(t) = \delta_0(t),\ x(0) = x'(0) = 0$

(b) $x''(t) = \delta_2(t),\ x(0) = 1, x'(0) = -1$

(c) $x''(t) + \omega^2 x(t) = A\delta_0(t) + h\delta_1(t - t_0),\ x(0) = x_0, x'(0) = x_0'$

(d) $x''(t) + \omega^2 x(t) = A[\delta_0(t) + \delta_0(t - t_0) + \ldots + \delta_0(t - nt_0) + \ldots],$

$$x(0) = x'(0) = 0$$

○ (a) $x(t) \leftarrow: \bar{x}(s)$ kabul edip probleme Laplace dönüşümünü uygularsak,

$$s^2\bar{x}(s) = 1$$

olur. Buradan,

$$\bar{x}(s) = \frac{1}{s^2} :\rightarrow t = x(t)$$

yani,

$$x(t) = t$$

bulunur. Demek ki, $\delta_0(t)$ Dirac fonksiyonunun etkisi, kütlesi bir olan maddesel noktaya hızı 1 olan düzgün doğrusal hareket kazandırır;

(b) Yine, probleme Laplace dönüşümünü uygularsak,

$$s^2\bar{x}(s) - s + 1 = s^2 \qquad \text{veya} \qquad \bar{x}(s) = 1 + \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} :\rightarrow \delta_0(t) + 1 - t = x(t)$$

olur. Yani problemin çözümü

$$x(t) = 1 - t + \delta_0(t)$$

olarak bulunur;

(c) Probleme Laplace dönüşümünü uyguladığımızda $\left(L\delta_0(t) = 1,\ L\delta_1(t - t_0) = se^{-t_0 s}\right)$,

$$(s^2 + \omega^2)\bar{x}(s) = A + hse^{-t_0 s} + x_0 s + x_0'$$

veya

$$\bar{x}(s) = \frac{A}{s^2 + \omega^2} + \frac{hs}{s^2 + \omega^2}e^{-t_0 s} + \frac{x_0 s}{s^2 + \omega^2} + \frac{x_0'}{s^2 + \omega^2}$$

olur. Son eşitliğe, görüntüler çizelgesini ve gecikmiş fonksiyonun görüntü formülünü uygularsak, problemin çözümünü

$$x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{A + x_0'}{\omega} \sin\omega t + hu(t - t_0)\cos\omega(t - t_0)$$

olarak buluruz;

**(d)** Yine probleme Laplace dönüşümünü uygularsak,

$$\bar{x}(s) = \frac{A}{s^2 + \omega^2}\left(1 + e^{-t_0 s} + e^{-2t_0 s} + \cdots + e^{-nt_0 s} + \cdots\right)$$

olur. Buradan, gecikmiş fonksiyonun görüntü formülüne göre, aranan çözümü

$$x(t) = \frac{A}{\omega}\left[\sin\omega t + u(t - t_0)\sin\omega(t - t_0) + \cdots + u(t - nt_0)\sin\omega(t - nt_0) + \cdots\right]$$

olarak buluruz. ○

---

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 5.8 için)

**1.** Aşağıdaki fonksiyonların görüntülerini bulun.

**(a)** $\delta_0(t-a) + 2\delta_0(t-2a) + 3\delta_0(t-3a) + 4\delta_0(t-4a), \quad (a > 0)$

**(b)** $\delta_0(t) - \delta_0(t-a) + 2\delta_0(t-2a) - 3\delta_0(t-3a) + 4\delta_0(t-4a), \quad (a > 0)$

**(c)** $\delta_0(t) + \delta_0(t-\pi) + \delta_0(t-2\pi) + \delta_0(t-3\pi) + \delta_0(t-4\pi)$

**(d)** $\delta_0(t) + \delta_0(t-\pi) + 2\delta_0(t-2\pi) + 3\delta_0(t-3\pi) + \cdots + n\delta_0(t-n\pi) + \cdots$

**(e)** $a_0\delta_0(t) + a_1\delta_1(t-1) + a_2\delta_2(t-2) + a_3\delta_3(t-3)$

**2.** Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün.

**(a)** $x'(t) = A\delta_0(t), \quad x(0) = 0$

**(b)** $x''(t) + \omega^2 x(t) = A\delta_0(t), \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0$

**(c)** $x''(t) + \omega^2 x(t) = A\delta_1(t), \quad x(0) = x'(0) = 0$

**(d)** $x''(t) + \omega^2 x(t) = A\delta_0(t - t_0) + B\delta_1(t - t_1), \quad x(0) = x_0, x'(0) = x_0'$

**(e)** $x''(t) + \omega^2 x(t) = A[\delta_0(t - t_0) + \delta_0(t - 2t_0) + \cdots + \delta_0(t - nt_0)],$

$x(0) = x_0'(0) = 0$

## 5.9 DİFERANSİYEL DENKLEMLER SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Sabit katsayılı doğrusal diferansiyel denklemler sisteminin (bkz. Bölüm 3.8) Laplace dönüşümünün yardımıyla çözümü, aynen sabit katsayılı doğrusal diferansiyel denklemlerin çözümündeki gibi yapılır.

Basitlik için önce, $x(t)$ ve $y(t)$ olmak üzere iki bilinmeyenli, sabit katsayılı, 1. mertebeden doğrusal denklemler sisteminin normal şeklini ele alalım:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + f_1(t) \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + f_2(t) \end{cases} \quad (t > 0) \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0 \tag{2}$$

Burada $a_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ katsayıları bilinen sabitler, $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ bilinen fonksiyonlardır.

$x(t) \leftarrow: \bar{x}(s)$, $y(t) \leftarrow: \bar{y}(s)$, $f_1(t) \leftarrow: F_1(s)$, $f_2(t) \leftarrow: F_2(s)$ kabul edip (1), (2) problemine Laplace dönüşümünü uygularsak,

$$\begin{cases} s\bar{x}(s) - x_0 = a_{11}\bar{x}(s) + a_{12}\bar{y}(s) + F_1(s) \\ s\bar{y}(s) - y_0 = a_{21}\bar{x}(s) + a_{22}\bar{y}(s) + F_2(s) \end{cases}$$

veya

$$\begin{cases} (s - a_{11})\bar{x}(s) \qquad - a_{12}\bar{y}(s) = x_0 + F_1(s) \\ \quad - a_{21}\bar{x}(s) + (s - a_{22})\bar{y}(s) = y_0 + F_2(s) \end{cases} \tag{3}$$

olmak üzere, $\bar{x}(s)$ ve $\bar{y}(s)$'ye göre doğrusal cebirsel denklemler sistemini elde ederiz. (3) sistemine (1), (2) probleminin *operatör denklemi* de denir. Bu sistemi Cramer kuralıyla (bkz. Bölüm 1.5) çözüp ($\Delta \neq 0$ koşuluyla) $\bar{x}(s)$ ve $\bar{y}(s)$, daha sonra ise bilinen yöntemle $x(t)$ ve $y(t)$ bulunarak ele alınan problemin çözümü elde edilir.

---

**ÖRNEK 1** Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün.

**(a)** $\begin{cases} x' = x + y, & x(0) = 1 \\ y' = x - y, & y(0) = 0 \end{cases}$

**(b)** $\begin{cases} x' = x - y + u(t-1), & x(0) = 0 \\ y' = x + 1, & y(0) = 0 \end{cases}$

**(c)** $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1, & x(0) = 1 \\ y' = x + y + e^t, & y(0) = 1 \end{cases}$

**(d)** $\begin{cases} x' = x + 2y + u(t-1) & x(0) = 0 \\ y' = -2x - y + 1 + 3u(t-2)\sin(t-2) & y(0) = 1 \end{cases}$

○ **(a)** $x(t) \leftarrow: \bar{x}(s)$, $y(t) \leftarrow: \bar{y}(s)$ kabul edip probleme Laplace dönüşümünü uygularsak, $\bar{x}(s)$ ve $\bar{y}(s)$'ye göre,

$$\begin{cases} s\bar{x}(s) - 1 = \bar{x}(s) + \bar{y}(s) \\ s\bar{y}(s) = \bar{x}(s) - \bar{y}(s) \end{cases} \quad \text{veya} \quad \begin{cases} (s-1)\bar{x}(s) \quad - \bar{y}(s) = 1 \\ \quad - \bar{x}(s) + (s+1)\bar{y}(s) = 0 \end{cases}$$

doğrusal cebirsel denklemler sistemini elde ederiz. Burada,

$$\Delta = \begin{vmatrix} s-1 & -1 \\ -1 & s+1 \end{vmatrix} = s^2 - 2 \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & s+1 \end{vmatrix} = s+1 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} s-1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

olduğunu göz önüne alıp Cramer kuralını uygularsak,

$$\bar{x}(s) = \frac{s}{s^2-2} + \frac{1}{s^2-2}, \qquad \bar{y}(s) = \frac{1}{s^2-2}$$

olur. Görüntüler çizelgesine göre,

$$\frac{s}{s^2-2} :\rightarrow \cosh\sqrt{2}t, \quad \frac{1}{s^2-2} :\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh\sqrt{2}t$$

olduğundan, buradan ele alınan problemin çözümünü

$$x(t) = \cosh\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh\sqrt{2}t, \qquad y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh\sqrt{2}t$$

olarak buluruz;

**(b)** $u(t-1) \leftarrow: \dfrac{e^{-s}}{s}$, $1 \leftarrow: \dfrac{1}{s}$ olduğunu göz önüne alıp ele alınan sistemin operatör denklemini yazalım:

$$\begin{cases} (s-1)\bar{x}(s) + \bar{y}(s) = \dfrac{e^{-s}}{s} \\ \quad - \bar{x}(s) + s\bar{y}(s) = \dfrac{1}{s} \end{cases}$$

Burada,

$$\Delta = \begin{vmatrix} s-1 & 1 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 - s + 1, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} e^{-s}/s & 1 \\ 1/s & s \end{vmatrix} = e^{-s} - \frac{1}{s},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} s-1 & e^{-s}/s \\ -1 & 1/s \end{vmatrix} = \frac{s-1}{s} + \frac{e^{-s}}{s}$$

olduğunu göz önüne alıp,

$$\bar{x}(s) = -\frac{1}{s(s^2-s+1)} + \frac{e^{-s}}{s^2-s+1}, \qquad \bar{y}(s) = \frac{s-1}{s(s^2-s+1)} + \frac{e^{-s}}{s(s^2-s+1)}$$

buluruz. Sağ taraftaki rasyonel kesirleri,

$$\frac{1}{s(s^2-s+1)} = \frac{A_1}{s} + \frac{B_1 s + C_1}{s^2-s+1} \qquad (A_1 = 1, \quad B_1 = -1, \quad C_1 = 1)$$

$$\frac{s-1}{s(s^2-s+1)} = \frac{A_2}{s} + \frac{B_2 s + C_2}{s^2-s+1} \qquad (A_2 = 1, \quad B_2 = -1, \quad C_2 = 1)$$

yani,

$$\frac{1}{s(s^2-s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s-1}{s^2-s+1}$$

$$\frac{s-1}{s(s^2-s+1)} = -\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2-s+1}$$

şeklinde basit kesirlere ayırırsak,

$$\bar{x}(s) = -\frac{1}{s} + \frac{s-1}{s^2-s+1} + \frac{e^{-s}}{s^2-s+1}$$

$$\bar{y}(s) = -\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2-s+1} + e^{-s}\left(\frac{1}{s} - \frac{s-1}{s^2-s+1}\right)$$

elde ederiz. Yeniden, paydası $s^2-s+1$ olan kesirleri dönüştürüp $\bar{x}(s)$ ve $\bar{y}(s)$'nin ifadelerini,

$$\bar{x}(s) = -\frac{1}{s} + \frac{s-1/2}{(s-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}/2}{(s-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{e^{-s}\sqrt{3}/2}{(s-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}$$

$$\bar{y}(s) = -\frac{1}{s} + \frac{s-1/2}{(s-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}/2}{(s-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}$$
$$+ e^{-s}\left[\frac{1}{s} - \frac{s-1/2}{(s-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}/2}{(s-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}\right]$$

şeklinde yazalım. Burada,

$$\frac{1}{s} :\rightarrow t, \quad \frac{s-1/2}{(s-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} :\rightarrow e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

$$\frac{\sqrt{3}/2}{(s-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} :\rightarrow e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$\frac{e^{-s}}{s} :\rightarrow u(t-1), \quad \frac{e^{-s}\sqrt{3}/2}{(s-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} :\rightarrow u(t-1)e^{(t-1)/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)$$

$$\frac{e^{-s}(s-1/2)}{(s-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} :\rightarrow u(t-1)e^{(t-1)/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)$$

olduğunu göz önüne alırsak, ele alınan problemin çözümünü

$$x(t) = -1 + e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{2}{\sqrt{3}}u(t-1)e^{(t-1)/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)$$

$$y(t) = -1 + e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$
$$+ u(t-1)\left[1 - e^{(t-1)/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{(t-1)/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right]$$

olarak buluruz;

(c) $1 \leftarrow: \frac{1}{s}$, $e^t \leftarrow: \frac{1}{s-1}$ olduğunu göz önüne alıp, sistemin operatör denklemini yazalım:

$$\begin{cases} (s+1)\bar{x}(s) - \quad 3\bar{y}(s) = \dfrac{s+1}{s} \\ \quad -\bar{x}(s) + (s-1)\bar{y}(s) = \dfrac{s}{s-1} \end{cases}$$

Burada,

$$\Delta = \begin{vmatrix} s+1 & -3 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix} = s^2 - 4,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (s+1)/s & -3 \\ s/(s-1) & s-1 \end{vmatrix} = \frac{s^2-1}{s} + \frac{3s}{s-1} = \frac{s^3+2s^2-s+1}{s(s-1)},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} s+1 & (s+1)/s \\ -1 & s/(s-1) \end{vmatrix} = \frac{s^2+s}{s-1} + \frac{s+1}{s} = \frac{s^3+2s^2-1}{s(s-1)}$$

olduğunu göz önüne alıp,

$$\bar{x}(s) = \frac{s^3+2s^2-s+1}{s(s+2)(s-1)(s-2)}$$

$$\bar{y}(s) = \frac{s^3+2s^2-1}{s(s+2)(s-1)(s-2)}$$

olarak buluruz. Sağ taraftaki rasyonel kesirleri basit kesirlere ayırırsak,

$$\bar{x}(s) = \frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{8}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1} + \frac{15}{8}\frac{1}{s-2}$$

$$\bar{y}(s) = -\frac{1}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{24}\frac{1}{s+2} - \frac{2}{3}\frac{1}{s-1} + \frac{15}{8}\frac{1}{s-2}$$

ve sonuçta ise çözüm fonksiyonlarını

$$x(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}e^{-2t} - e^{t} + \frac{15}{8}e^{2t}, \qquad y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{24}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{t} + \frac{15}{8}e^{2t}$$

olarak buluruz;

**(d)** Yine, $u(t-1) \leftarrow: \frac{e^{-s}}{s}$, $1 + 2u(t-2)\sin(t-2) \leftarrow: \frac{1}{s} + 2\frac{e^{-2s}}{s^2+1}$ olduğunu göz önüne alıp ele alınan sistemin operatör denklemini yazalım:

$$\begin{cases} (s-1)\bar{x}(s) - 2\bar{y}(s) = \dfrac{e^{-s}}{s} \\ 2\bar{x}(s) + (s+1)\bar{y}(s) = 1 + \dfrac{1}{s} + 3\dfrac{e^{-2s}}{s^2+1} \end{cases}$$

Burada,

$$\Delta = \begin{vmatrix} s-1 & -2 \\ 2 & s+1 \end{vmatrix} = s^2+3$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{e^{-s}}{s} & -2 \\ 1 + \dfrac{1}{s} + 3\dfrac{e^{-2s}}{s^2+1} & s+1 \end{vmatrix} = 2 + \frac{2}{s} + e^{-s}\left(1 + \frac{1}{s}\right) + 6\frac{e^{-2s}}{s^2+1}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} s-1 & \dfrac{e^{-s}}{s} \\ 2 & 1+\dfrac{1}{s}+3\dfrac{e^{-2s}}{s^2+1} \end{vmatrix} = s-\frac{1}{s}-2\frac{e^{-s}}{s}+3\frac{e^{-2s}(s-1)}{s^2+1}$$

olduğundan, Cramer kuralına göre,

$$\bar{x}(s) = \frac{2}{s^2+3}+\frac{2}{s(s^2+3)}+e^{-s}\left[\frac{1}{s^2+3}+\frac{1}{s(s^2+3)}\right]+6\frac{e^{-2s}}{(s^2+1)(s^2+3)}$$

$$\bar{y}(s) = \frac{s}{s^2+3}-\frac{1}{s(s^2+3)}-2\frac{e^{-s}}{s(s^2+3)}+3\frac{e^{-2s}(s-1)}{(s^2+1)(s^2+3)}$$

bulunur. Sağ taraftaki rasyonel kesirleri basit kesirlere ayırıp,

$$\bar{x}(s) = \frac{2}{s^2+3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+3}\right)+e^{-s}\left(\frac{1}{s^2+3}+\frac{1}{3}\frac{1}{s}-\frac{1}{3}\frac{s}{s^2+3}\right)$$
$$+3e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+3}\right)$$

$$\bar{y}(s) = \frac{s}{s^2+3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+3}\right)-\frac{2}{3}e^{-s}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+3}\right)$$
$$+\frac{3}{2}e^{-2s}\left(\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+3}+\frac{1}{s^2+3}\right)$$

şeklinde yazalım. Burada,

$$\frac{1}{s} :\to 1,\quad \frac{1}{s^2+1} :\to \sin t,\quad \frac{s}{s^2+1} :\to \cos t,\quad \frac{1}{s^2+3} :\to \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t,\quad \frac{s}{s^2+3} :\to \cos\sqrt{3}t$$

olduğunu göz önüne alıp gecikmiş fonksiyonun ters Laplace dönüşümü formülünü uygularsak, ele alınan problemin çözümünü,

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t+\frac{2}{3}(1-\cos\sqrt{3}t)$$
$$+u(t-1)\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}(t-1)-\frac{1}{3}\cos\sqrt{3}(t-1)\right]$$
$$+3u(t-2)\left[\sin(t-2)-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}(t-2)\right]$$

$$y(t) = \cos\sqrt{3}t-\frac{1}{3}(1-\cos\sqrt{3}t)-\frac{2}{3}u(t-1)\left[1-\cos\sqrt{3}(t-1)\right]$$
$$+\frac{3}{2}u(t-2)\left[\cos(t-2)-\sin(t-2)-\cos\sqrt{3}(t-2)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}(t-2)\right]$$

olarak buluruz. ○

---

Bilinmeyen fonksiyon sayısı ikiden fazla veya sistemin mertebesi birden yüksek olduğu durumda da çözüm benzer yöntemle bulunur.

---

**ÖRNEK 2** Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün.

(a) $\begin{cases} x' = y - z, & x(0) = 1 \\ y' = -x + z, & y(0) = 0 \\ z' = x - y, & z(0) = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x'' - y' = e^t, & x(0) = 1, x'(0) = 0 \\ x' + y'' = y, & y(0) = -1, y'(0) = 0 \end{cases}$

○ (a) $x(t) \leftarrow: \bar{x}(s)$, $y(t) \leftarrow: \bar{y}(s)$, $z(t) \leftarrow: \bar{z}(s)$ kabul edersek, ele alınan problemin operatör denklemi,

$$\begin{cases} s\bar{x}(s) - \bar{y}(s) + \bar{z}(s) = 1 \\ \bar{x}(s) + s\bar{y}(s) - \bar{z}(s) = 0 \\ -\bar{x}(s) + \bar{y}(s) + s\bar{z}(s) = 2 \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\Delta = \begin{vmatrix} s & -1 & 1 \\ 1 & s & -1 \\ -1 & 1 & s \end{vmatrix} = s(s^2+3), \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & s & -1 \\ 2 & 1 & s \end{vmatrix} = s^2 - 2s + 3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} s & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & s \end{vmatrix} = s + 3, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} s & -1 & 1 \\ 1 & s & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2s^2 + s + 3$$

olduğunu göz önüne alıp Cramer kuralını uygularsak,

$$\bar{x}(s) = \frac{s^2 - 2s + 3}{s(s^2+3)}, \quad \bar{y}(s) = \frac{s+3}{s(s^2+3)}, \quad \bar{z}(s) = \frac{2s^2 + s + 3}{s(s^2+3)}$$

olur. Sağ taraftaki rasyonel kesirleri basit kesirlere ayırıp görüntüler çizelgesini kullanırsak,

$$\frac{s^2 - 2s + 3}{s(s^2+3)} = \frac{A_1}{s} + \frac{B_1 s + C_1}{s^2 + 3} \quad (A_1 = 1, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = -2)$$

$$\frac{s+3}{s(s^2+3)} = \frac{A_2}{s} + \frac{B_2 s + C_2}{s^2+3} \quad (A_2 = 1, \quad B_2 = -1, \quad C_2 = 1)$$

$$\frac{2s^2+s+3}{s(s^2+3)} = \frac{A_3}{s} + \frac{B_3 s + C_3}{s^2+3} \quad (A_3 = B_3 = C_3 = 1)$$

yani,

$$\bar{x}(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2+3} :\rightarrow 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t = x(t)$$

$$\bar{y}(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+3} + \frac{1}{s^2+3} :\rightarrow 1 - \cos\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t = y(t)$$

$$\bar{z}(s) = \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+3} + \frac{1}{s^2+3} :\rightarrow 1 + \cos\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t = z(t)$$

olur. Böylece, ele alınan problemin çözümü,

$$x(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t, \qquad y(t) = 1 - \cos\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t,$$

$$z(t) = 1 + \cos\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t$$

olarak bulunur;

**(b)** Problemin operatör denklemini,

$$\begin{cases} s^2\bar{x}(s) - s\bar{y}(s) = \dfrac{s^2}{s-1} \\ s\bar{x}(s) + (s^2-1)\bar{y}(s) = -s+1 \end{cases}$$

şeklinde yazıp yine

$$\Delta = \begin{vmatrix} s^2 & -s \\ s & s^2-1 \end{vmatrix} = s^4, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{s^2}{s-1} & -s \\ -s+1 & s^2-1 \end{vmatrix} = s^3+s,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} s^2 & \dfrac{s^2}{s-1} \\ s & -s+1 \end{vmatrix} = s^2 - \frac{s^4}{s-1}$$

olduğunu göz önüne alır ve sırayla Cramer kuralıyla görüntüler çizelgesini kullanırsak,

$$\bar{x}(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^3}:\rightarrow 1+\frac{1}{2}t^2=x(t),\qquad \bar{y}(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s-1}:\rightarrow t-e^t=y(t)$$

elde ederiz. Böylece, ele alınan problemin çözümü

$$x(t)=1+\frac{1}{2}t^2,\quad y(t)=t-e^t$$

olarak bulunur. ○

---

**Uyarı** Laplace dönüşümünün yardımıyla sabit katsayılı doğrusal diferansiyel denklemler sisteminin genel çözümleri de bulunabilir. Bunun için başlangıç değerlerinin yerine keyfi sabitleri kullanmak yeterlidir.

---

**ÖRNEK 3** $\begin{cases} x'+y=t \\ x+y'=au(t-2) \end{cases}$ sisteminin genel çözümünü bulun.

○ $x(0)=C_1$, $y(0)=C_2$ kabul edip $t \leftarrow: \frac{1}{s^2}$, $u(t-2) \leftarrow: \frac{e^{2s}}{s}$ olduğunu göz önüne alırsak, sistemin operatör denklemini

$$\begin{cases} s\bar{x}(s)+\bar{y}(s)=\dfrac{1}{s^2}+C_1 \\ \bar{x}(s)+s\bar{y}(s)=\dfrac{ae^{-2s}}{s}+C_2 \end{cases}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada,

$$\Delta=\begin{vmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{vmatrix}=s^2-1$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{s^2}+C_1 & 1 \\ \dfrac{ae^{-2s}}{s}+C_2 & s \end{vmatrix}=\frac{1}{s}+C_1s-C_2-\frac{ae^{-2s}}{s}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} s & \dfrac{1}{s^2}+C_1 \\ 1 & \dfrac{ae^{-2s}}{s}+C_2 \end{vmatrix}=C_2s-\frac{1}{s^2}-C_1+ae^{-2s}$$

olduğunu göz önüne alıp,

$$\bar{x}(s)=\frac{s}{s^2-1}-\frac{1}{s}+\frac{C_1s}{s^2-1}-\frac{C_2}{s^2-1}-ae^{-2s}\left(\frac{s}{s^2-1}-\frac{1}{s}\right)$$

$$\bar{y}(s) = \frac{C_2 s}{s^2-1} - \frac{1}{s^2-1} + \frac{1}{s^2} - \frac{C_1}{s^2-1} + ae^{-2s}\frac{1}{s^2-1}$$

buluruz. Yine görüntüler çizelgesini ve gecikmiş fonksiyonun dönüşüm formülünü kullanırsak, ele alınan sistemin genel çözümü

$$x(t) = (1+C_1)\cosh t - C_2 \sinh t - 1 - au(t-2)[-1+\cosh(t-2)]$$

$$y(t) = C_2 \cosh t - (1-C_1)\sinh t + t + au(t-2)\sinh(t-2)$$

olarak bulunur. ○

---

Görüldüğü gibi, Laplace dönüşümü aynı şekilde gerek türdeş, gerekse de türdeş olmayan sabit katsayılı diferansiyel denklemlere ve denklemler sistemine uygulanabilir. Başka bir deyişle, sabit katsayılı gerek yüksek mertebeden diferansiyel denklemler, gerekse de denklemler sisteminin Laplace dönüşümünün yardımıyla çözümü diğer yöntemlerden daha elverişlidir.

## ALIŞTIRMALAR (Bölüm 5.9 için)

**1.** Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün.

**(a)** $\begin{cases} x' = -y, & x(0) = 1 \\ y' = -x, & y(0) = -1 \end{cases}$

**(b)** $\begin{cases} x' = x + y + 1, & x(0) = 0 \\ y' = x - y, & y(0) = 0 \end{cases}$

**(c)** $\begin{cases} x' = -y, & x(0) = 1 \\ y' = 2x + 2y, & y(0) = 1 \end{cases}$

**(d)** $\begin{cases} x' = -2x - 2y + 10e^{2t}, & x(0) = 1 \\ y' = 2x - y + 7e^{2t}, & y(0) = 3 \end{cases}$

**(e)** $\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + \beta e^{\alpha t}, & x(0) = 1 \\ y' = -\beta x - \alpha y, & y(0) = 1 \end{cases}$

**(f)** $\begin{cases} x' = 4x + 2y, & x(0) = 0 \\ y' = -x + y, & y(0) = -1 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x' = -2x - 2y, & x(0) = 0 \\ y' = 5x + 4y + 4e^t \cos t, & y(0) = 0 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x' = -2x + y + \tan t, & x(0) = 0 \\ y' = -5x + 2y + \sin t, & y(0) = 0 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x' = -x + y + au(t-1), & x(0) = 0 \\ y' = x - y + e^t, & y(0) = 1 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} x' = x + y + \sin t, & x(0) = -1 \\ y' = x - y + au(t-2), & y(0) = 1 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} x' = x + 4y + e^t, & x(0) = 2 \\ y' = x + y + e^t, & y(0) = 1 \end{cases}$

(l) $\begin{cases} x' = -x - y + 2z + e^t, & x(0) = 0 \\ y' = x + y + z, & y(0) = 0 \\ z' = 2x + y + 3z, & z(0) = 0 \end{cases}$

(m) $\begin{cases} x' = x + z, & x(0) = 0 \\ y' = 3x + z, & y(0) = 1 \\ z' = 3x + y, & z(0) = 1 \end{cases}$

(n) $\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z, & x(0) = 1 \\ y' = -2x + y - 2z, & y(0) = 1 \\ z' = 5x + 2y + 7z, & z(0) = 1 \end{cases}$

**2.** Yüksek mertebeden diferansiyel denklemler sistemi için aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün.

(a) $\begin{cases} x'' = -y + 1, & x(0) = x'(0) = 0 \\ y'' = -x, & y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x'' + 2y' + x = 0, & x(0) = x'(0) = 0 \\ x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, & y(0) = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x'' + y' - 2y = e^{2t}, & x(0) = -1, x'(0) = 1 \\ 2x' + y' - 3x = 0, & y(0) = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x'' - x' - y'' - y' + 9x - 3y = 0, & x(0) = x'(0) = 1 \\ 2x'' + x' - y'' + y' + 7x - 5y = 0, & y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x'' - y' = 0, & x(0) = 0, x'(0) = 2 \\ y'' - x' = -2\cos t, & y(0) = 2, y'(0) = 0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x'' - 5x' - y' + 4x + y = 0, & x(0) = x'(0) = 1 \\ x' + y'' - 3y' - x + 2y = 0, & y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x'' + y' = 2\sin t, & x(0) = 0, x'(0) = -1 \\ y'' + z' = 2\cos t, & y(0) = -1, y'(0) = 0 \\ z'' - x = 0, & z(0) = 0, z' = 1 \end{cases}$

3. Aşağıdaki diferansiyel denklem sistemlerinin genel çözümlerini bulun.

(a) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = x - y \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + y + t \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x' = -2x - y + \sin t \\ y' = 4x + 2y + \cos t \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x' = -y + e^t \\ y' = -x + e^{-t} \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x'' + 2x + 4y = e^t \\ y'' - x - 3y = -t \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x'' + y' = t \\ y'' - x' = 0 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x'' + y' = \sinh t - \sin t \\ y'' + x' = \cosh t - \cos t \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x'' - y' = 1 - u(t - \pi), x'' - y' = 1 - u(t - \pi) \\ y' + x = t - 2u(t - \pi/2)(t - \pi/2) + u(t - \pi)(t - \pi) \end{cases}$

## BÖLÜM 5 İÇİN ÇEŞİTLİ ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki fonksiyonların görüntülerini bulun.

(a) $3t + 2\sin t - 3$

(b) $5\cos 2t - 3e^t - t$

(c) $3\sinh 2t + 5\cosh 3t - \sin t$

(d) $\cos^2 t$

(e) $\sin^2 t$

(f) $\sin \alpha t \cos \beta t$

(g) $\sin \alpha t \sin \beta t$

(h) $\cos \alpha t \cos \beta t$

(i) $\sin^3 t$

(l) $\dfrac{e^t - 1}{t}$

(m) $\dfrac{\cos t - \cos 2t}{t}$

(n) $\dfrac{1 - \cos t}{t}$

(o) $\dfrac{e^t - 1 - t}{t}$

(p) $\dfrac{e^t - e^{-t}}{t}$

2. Aşağıdaki fonksiyonlar başlangıç fonksiyonları mıdır?

(a) $e^{3t^2}$ (b) $te^{2t^2}$ (c) $e^{3t^2}\sin 2t$

3. Aşağıdaki görüntülerin başlangıç fonksiyonlarını bulun.

(a) $\dfrac{1}{s^2 + 4s + 5}$

(b) $\dfrac{1}{s^2 + 4s + 7}$

(c) $\dfrac{s}{(s+1)^2}$

(d) $\dfrac{s}{(s^2 + \beta^2)^2}$

(e) $\dfrac{1}{s^2(s^2 - 1)}$

(f) $\dfrac{1}{s^4 - 16}$

(g) $\dfrac{s+2}{(s+1)(s-2)(s^2+4)}$

(h) $\dfrac{s}{(s^2 - \alpha^2)(s^2 + \beta^2)}$

(i) $\dfrac{s}{(s+\alpha)[(s+\alpha)^2 + \beta^2)]}$

(j) $\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+2s+2)}$

4. Aşağıdaki fonksiyonların görüntülerini bulun.

(a) $\displaystyle\int_0^t e^{t-\tau}\sin\tau d\tau$

(b) $\displaystyle\int_0^t \cos(t-\tau)e^{2\tau}d\tau$

(c) $\displaystyle\int_0^t (t-\tau)^2\cosh\tau d\tau$

(d) $\displaystyle\int_0^t e^{2(t-\tau)}\tau^2 d\tau$

5. Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün.

(a) $x' + 2x = \sin t,\ x(0) = 0$

(b) $x'' + x' = 1,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1$

(c) $x'' + 3x' = e^t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1$

(d) $x'' + 2x' + 3x = e^{-t},\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1$

(e) $x'' + 2x' = t\sin t,\ x(0) = x'(0) = 0$

(f) $x'' + x' = \cos t,\ x(0) = 2,\ x'(0) = 0$

(g) $x'' + 2x' = t^2,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0$

(h) $x''' + x'' = \cos t,\ x(0) = -2,\ x'(0) = x''(0) = 0$

(i) $x''' + x' = e^t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = 0$

(j) $x^{(4)} + 2x'' + x = t\sin t,\ x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$

(k) $x^{(4)} - x = \sinh t,\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,\ x'''(0) = 1$

(l) $x^{(4)} - 5x'' + 10x' - 6x = 0,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0,\ x''(0) = 6,$

$x'''(0) = -14$

**6.** Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün.

(a) $x' + x = f(t),\ x(0) = 0,\ f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 2 \\ 0, & 2 \le t \end{cases}$

(b) $x'' + 2x' = f(t),\ x(0) = x'(0) = 0,\ f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \le t < \pi \\ 0, & \pi \le t \end{cases}$

(c) $x'' - x = f(t),\ x(0) = x'(0) = 0,\ f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \le t < \pi \\ 0, & \pi \le t \end{cases}$

(d) $x'' + x = f(t),\ x(0) = x'(0) = 0,\ f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ -1, & 1 \le t < 2 \\ 0, & 2 \le t \end{cases}$

**7.** Aşağıdaki integal denklemleri çözün.

(a) $y(t) = \sin t + \frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)y(\tau)d\tau$ (b) $y(t) = t + \int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)d\tau$

(c) $y(t) = \cos t + \frac{1}{2}\int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau$ (d) $y(t) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-\tau)y(\tau)d\tau$

(e) $y(t) = e^{-t} + \frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)^2 y(\tau)d\tau$ (f) $y(t) = e^t - 2\int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau$

(g) $\int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau = t$ (h) $\int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau = \sin t$

(i) $\int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau = t + t^2$ (j) $\int_0^t e^{t-\tau}y(\tau)d\tau = \sin t$

(k) $\int_0^t \cosh(t-\tau)y(\tau)d\tau = \sinh t$ (l) $\int_0^t \cosh(t-\tau)y(\tau)d\tau = t$

**8.** Aşağıdaki sistemler için başlangıç değer problemlerini çözün.

(a) $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 5x - y \end{cases}$ $x(0) = -1, y(0) = 2$

(b) $\begin{cases} x' = x + 2y + t \\ y' = 2x + y + t \end{cases}$ $x(0) = 2, y(0) = 4$

(c) $\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = x + y + e^{\alpha t} \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 1$

(d) $\begin{cases} x' = 2x - y + z \\ y' = x + z \\ z' = -3x + y - 2z \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 1, z(0) = 0$

(e) $\begin{cases} x'' - y' = 0 \\ x - y'' = 2\sin t \end{cases}$ $x(0) = -1, x'(0) = y(0) = y'(0) = 1$

(f) $\begin{cases} x'' - y' = 0 \\ x - y'' = 2\cos t \end{cases}$ $x(0) = y'(0) = 0, x'(0) = y(0) = 2$

(g) $\begin{cases} 2x'' + x - y' = -3\sin t \\ x + y' = -\sin t \end{cases}$ $x(0) = 0, x'(0) = 1, y(0) = 0$

(h) $\begin{cases} tx' = -x + y + z + t \\ y' = x - y + z + t^3 \\ tz' = x + y + z + 4 \end{cases}$ $x(1) = y(1) = z(1) = 0$

**9*.** Aşağıdaki özel olmayan integralleri hesaplayın.

(a) $\dot{I}(t) = \int_0^\infty \frac{\cos t\tau}{a^2 + \tau^2} d\tau$ (b) $\dot{I}(t) = \int_0^\infty \frac{\tau \sin t\tau}{1 + \tau^2} d\tau, \ (t > 0)$

**10.** Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözün.

(a) $x'' + x = f(t), \ x(0) = x'(0) = 0$

1) $f(t)=\begin{cases}3, & 0\le t<2\\ 0, & 2\le t\end{cases}$ 2) $f(t)=\begin{cases}\cos t, & 0\le t<\pi\\ 0, & \pi\le t\end{cases}$

3) $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<1\\ -1, & 1\le t<2\\ 0, & 2\le t\end{cases}$

**(b)** $x''-x=f(t),\ x(0)=x'(0)=0$

1) $f(t)=\begin{cases}a, & 0\le t<b\\ 0, & b\le t\end{cases}$ 2) $f(t)=\begin{cases}t, & 0\le t<1\\ 0, & 1\le t\end{cases}$

3) $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<1\\ -1, & 1\le t<2\\ 0, & 2\le t\end{cases}$

**(c)** $\begin{cases}x''-y'=f_1(t)\\ y'+x=f_2(t)\end{cases}\quad x(0)=y(0)=x'(0)=0$

$f_1(t)=\begin{cases}2, & 0\le t<2\\ 0, & 2\le t\end{cases}$ $f_2(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<1\\ 0, & 1\le t\end{cases}$

**(d)** $\begin{cases}x''-y=0\\ y''-x=f_2(t)\end{cases}\quad x(0)=y(0)=x'(0)=y'(0)=0$

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<\pi\\ -1, & \pi\le t<2\pi\\ 0, & 2\pi\le t\end{cases}$$

# 1. BÖLÜM

## BÖLÜM 1.1

1. (a) $\begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 3 & -10 \\ -8 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -7 & 1 & -6 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 13 & 3 & 8 & 4 \\ 0 & -10 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -5 & 2 & -3 \\ -4 & -4 & -6 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 11 & 4 & 9 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{313}x_3 = b_3 \end{cases}$

3. (a) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -6 \\ -6 & -14 & -9 \\ 4 & 16 & 12 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2 & -6 & 4 \\ 3 & 7 & -12 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 10 & -3 \\ -2 & -3 & 29 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -2 & -9 & -1 \\ 0 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -6 & 7 & -1 \\ 4 & -12 & -2 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 5 & -6 & 4 \\ -2 & -14 & 16 \\ -6 & -9 & 12 \end{bmatrix}$

4. (a) $\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 8 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 16 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 17 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ (h) $[26]$ (i) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 12 \\ 4 & 12 & 16 \end{bmatrix}$

(j) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ (k) $[14]$

## BÖLÜM 1.3

1. (a) 0 (b) –79 (c) –45 (d) 0
   (e) 76 (f) $4a^2b^2c^2$ (g) 14 (h) 8

2. (a) –120 (b) 36 (c) –60 (d) 18
   (e) 45 (f) 0 (g) –12 (h) –6
   (i) –3. 4. $(-1)^{[n/2]}\Delta$

## BÖLÜM 1.4

1. (a) $\begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) tersi yoktur

   (d) $\begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$ (e) tersi yoktur (f) $\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -7 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

   (g) $\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 6 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (h) tersi yoktur (i) $\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

   (j) $\frac{1}{36}\begin{bmatrix} 6 & 6 & -12 & -30 \\ 8 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 12 \\ 3 & 3 & 3 & -24 \end{bmatrix}$ (k) tersi yoktur

2. (a) 1 (b) 2 (c) 2 (d) 3
(e) 3 (f) 4 (g) 2

3. (a) bağımsız (b) bağımsız (c) bağımlı (d) bağımsız

## BÖLÜM 1.5

1. (a) $(3, -1)$ (b) $(2, 1)$ (c) $(2, -\sqrt{2})$ (d) $(2, -2)$
(e) $(11.5, -15)$ (f) $(0.6, -2.2)$ (g) $(-19/16, 17/12, -19/12)$
(h) $(3, 1, -1)$ (i) $(41/8, -5/2, -27/8)$ (j) $(2, 0, 0, 0)$
(k) $(1, -1, 2, -2)$ (l) $(2, 0, 1, 3)$

2. (a) uyumsuz (b) $((1+x_2)/3, x_2)$ (c) $(10, 5)$
(d) uyumsuz (e) uyumsuz (f) uyumsuz
(g) $(45/4, 7/4, -55/12)$ (h) $(1, 1, 1)$ (i) $(-1, -1, 1)$
(j) $((8x_4 - 6)/7, (1 - 13x_4)/7, (15 - 6x_4)/7, x_4)$
(k) $(20/9 + x_4 - 53x_5/9, -5/3 - 5x_4/2 + 5x_5/6, -1/9 + 2x_5/9, x_4, x_5)$
(l) $(-(12 + 7x_2 + 30x_3 + 21x_5/24, x_2, x_3, (2 - x_5)/2, x_5)$

3. (a) $\lambda \neq 0$ olduğunda, uyumsuz, $\lambda = 0$ 'da,

$$(-(3 + 5x_3 + 13x_4)/2, -(7 + 7x_3 + 19x_4)/2, x_3, x_4)$$

genel çözüm

(b) $(\lambda - 1)(\lambda + 3) \neq 0$ olduğunda, genel çözüm $1/(\lambda + 3), 1/(\lambda + 3), 1/(\lambda + 3), 1/(\lambda + 3)$ $\lambda = 1$ olduğunda ise, $(1 - x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4)$ 'tür. $\lambda = -3$ olduğunda, sistem uyumsuzdur.

(c) $\lambda \neq 8$ olduğunda, genel çözüm $(0, 4 - 2x_4, 3 - 2x_4, x_4)$, $\lambda = 8$ olduğunda ise, $(x_1, 4 + 2x_1 - 2x_4, 3 - 2x_4, x_4)$ 'tür.

**4.** **(a)** $(1, 1, -1)$ **(b)** $(1, 2, -1)$ **(c)** $(-1, 2, -2)$

**(d)** $(1, 2, -1, 2)$ **(e)** $(4, -2, -1, 1)$ **(f)** $(6/7, 67/21, -8/3, 4/21)$

**(g)** $(6 - x_5, -5 + x_5, 3, -1 - x_5, x_5)$

**(h)** $((8 - 31x)/11, (26 + 16x_4)/11, (32 + 4x_4)/11, x_4)$

**(i)** $(-1, 2, -3)$ **(j)** $(16/5 + 2x_2 + 3x_4, x_2, -2/5 - 3x_4, x_4)$

**(k)** $(-1 + x_3 - 3 + x_3, x_3, 0)$

**5.** **(a)** $e(19, -6, 1), X = \lambda e$ **(b)** $e_1(13, -10, 1,0), e_2(-8, 7, 0, 1), X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$

**(c)** $e(1, -1, 1), X = \lambda e$ **(d)** $e(1, 1, 1), X = \lambda e$

**(e)** sistemin yalnız sıfır çözümü vardır

**(f)** $e_1(8, -6, 1, 0), e_2(-7, 5, 0, 1), X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$

**(g)** $e_1(-22/13, 9/13, 16/13, 1, 0), e_2(-8/13, -5/13, 7/13, 0, 1), X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$

**(h)** $e(22/3, -5/3, -1/3, 1, 0), X = \lambda e$

## 1. BÖLÜM İÇİN

**1.** **(a)**

$$AB = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 1 & 10 & -6 \\ 0 & 15 & -5 \end{bmatrix}, \quad AC = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 3 \\ 8 & 10 & -4 \end{bmatrix}, \quad AD = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \\ -9 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AF = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A^T B^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 7 & -3 & 1 \\ -9 & 3 & 17 \end{bmatrix}, \quad C^T A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 \\ -2 & -3 & 11 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$EH = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad JE = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad GD = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad H^T D = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$HI = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad HJ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad JC^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F^T F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CD = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad CC^T = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

**(b)** $A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -10 & 8 & 6 \\ 3 & -4 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B^{-1} = -\frac{1}{25}\begin{bmatrix} -2 & 11 & -3 \\ -4 & -3 & -6 \\ -7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

$D^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $(A^T)^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -10 & 3 & -1 \\ 8 & -4 & 0 \\ 6 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ $(C^T)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

**(c)**

$$ABC = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 32 & 22 & -6 \\ -13 & -31 & 11 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)C = \begin{bmatrix} 11 & -3 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \\ 19 & 17 & -6 \end{bmatrix} \qquad AB + EG^T = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 2 & 10 & -4 \\ -3 & 13 & -5 \end{bmatrix}$$

**2.** **(a)** değişmez **(b)** 2'ye katlanır

**(c)** değişmez **(d)** $(-1)^{n-1}$ ile çarpılır

**3.** **(a)** 70 **(b)** $9\sqrt{10}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ **(c)** $(bd - cç)^2$

**(d)** $(a+b+c)(a+b-c)$ **(e)** $a^2b^2$ **(f)** 640 **(g)** 665

**4.** **(a)** $n!$ **(b)** $2n+1$

**5.** **(a)** 1 **(b)** $(-1)^{n-1}n$ **(c)** 2

**6.** **(a)** $r = 3, \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ **(b)** $r = 2, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ **(c)** $r = 3, \begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

(d) $r = 3, \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix}$ (e) $r = 3, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

**7.** (a) uyumlu, $(2, 1, 3)$ (b) uyumsuz (c) uyumlu, $(x_1, x_2, -x_1 + 2x_2, 1)$

(d) uyumlu, $(1, 2, -1)$ (e) uyumlu, $(1, 2, -1, 4)$

(f) uyumlu, $(-8, 3 + x_4, 6 + 2x_4, x_4)$ (g) uyumsuz

(h) uyumlu, $(3, -4, -1, 1)$ (i) uyumsuz (j) uyumlu, $(1, 2 - 1, 4)$

(k) uyumlu, $(-8, 3 + x_4, 6 + 2x_4, x_4)$ (l) uyumsuz

**8.** (a) $(x_2 + 2, 2, 2x_2 - 1)$ (b) $(-2x_3, 1/4, x_3)$

(c) $(-1, 2, -3)$ (d) $(2, 0, 1, 3)$

**9.** (a) Sistemin yalnız sıfır çözümü vardır.

(b) Sistemin yalnız sıfır çözümü vardır.

(c) $e_1(1, 0, -5/2, -7/2)$, $e_2(0, 1, 5, -7)$, $X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$

(d) Sistemin yalnız sıfır çözümü vardır.

(e) $e_1(8, -6, 1, 0)$, $e_2(-7, 5, 0, 1)$, $X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$

(f) $e_1(-22/13, 9/13, 16/13, 1, 0)$, $e_2(-8/13, -5/13, 7/13, 0, 1)$, $X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$

# 2. BÖLÜM

## BÖLÜM 2.1

1. (a) 1. mertebeden (b) 1. mertebeden (c) 2. mertebeden
   (d) 2. mertebeden (e) 3. mertebeden (f) 4. mertebeden
   (g) 2. mertebeden (h) 2. mertebeden (i) 3. mertebeden

2. (a) evet (b) evet (c) evet
   (d) evet (e) evet (f) hayır
   (g) hayır

3. (a) $yy' = p$ (b) $y + y' = 0$ (c) $3xy' + y(3 - y) = 0$
   (d) $y' - y / x = e^x$ (e) $y' = (3x + y - 5)/(7 - 9x - 3y)$

5. (a) hayır (b) evet (c) hayır

## BÖLÜM 2.3

1. (a) $xOy$ düzlemi (b) $xOy$ düzlemi (c) $y \neq x$
   (d) $y \neq \pi k, k \in Z$ (e) $x + y > 0$ (f) $(x, y) \neq (0, 0)$
   (g) $y^2 < x^2$ (h) $y^2 < x$ (i) $y > 1$

## BÖLÜM 2.4

1. (a) $\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3y^3} = C$ (b) $\tan y - e^x = C$ (c) $\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{3}\sin x^3 = C$

(d) $3e^{2x} + 2e^{-3y} + C = 0$ (e) $\frac{1}{a}\arctan\frac{y}{a} - \frac{1}{x} = C$ (f) $y^3 + 3\ln|y\sin x| = C$

(g) $y - \arctan y + \frac{1}{4}(2x - \sin 2x) = C$ (h) $2e^x + e^{-y^2} + C = 0$

(i) $\frac{1}{2}\arctan\frac{y}{2} - \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} = C$ (j) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \ln\left|\frac{y}{x} = C\right|$

(k) $2e^y - e^{2x} + 2\arctan y + \ln(1 + y^2) = C$

2. (a) $\sqrt{y} - \sqrt{x} = 1$ (b) $y = 2x + 3$

(c) $\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2} = \sqrt{2}$ (d) $y = e^{\sin x}$

3. (a) $4(x + C)(3x + 2y + 1)^2 + 1 = 0$ (b) $2y - 3\ln|4x + 6y - 1| = C$

(c) $\tan\frac{x + y - 1}{2} = Ce^x$ (d) $\frac{x + y}{x + y - 1} = Ce^x$

(e) $(x - y)^2 + 2x = C$ (f) $\arctan(x + y) - x = C$

4. (a) $2x^2y^2\ln|Cx| + 1 = 0$ (b) $y = C^4x^3\sqrt{x^2y^2 + 4}$

(c) $y^2(x^2 - Cx^{10}) = 4,\ (C > 0)$

(d)* $\left[(xy)^2(xy) + 1\right]e^{\frac{2\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2xy+1}{\sqrt{3}}} = (Cx)^2$ **Yönerge.** Sağ tarafı $\frac{y}{x}\frac{1}{(xy)(1 + xy)}$ şeklinde yazın.

5. $xy = C$

6. $y = \frac{1}{k}\cosh k(x + C)$

7. $y = Cx^{1-k}$

8. $y^2 = /k - 1)x^2 + C, 0 < k < 1$ olduğunda, elips, $k > 1$ olduğunda, hiperbol.

## BÖLÜM 2.5

1. (a) $x^3 + 3x^2y - y^3 = C$ (b) $y = C|x|^{3/2} - x \ (x \neq 0)$

(c) $y = Cx + 2x\ln|x| \ (x \neq 0)$

(d) $y = C|x|^b + \frac{a}{1-b}x \ (x \neq 0, b \neq 1)$, $y = Cx + ax\ln|x| \ (x \neq 0, b = 1)$

(e) $\ln(|y|/C) - (x/y)^4/4 = 0$ (f) $y = Cx$

(g) $\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\arctan(y/x)}$ (h) $2y^3 - 3xy^2 + 6x^2y = C$

(i) $y = \pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$ (j) $\ln|Cx| + e^{-y/x}$

(k) $(x+y)^2 = Cx^3e^{-x/(x+y)}$ (l) $Cx = \varphi(y/x)$

(m) $y = \frac{C}{2}x^2 - \frac{1}{2C}$ (n) $(x^2 + y^2)^3(x+y)^2 = C$

2. (a) $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ (b) $y = xe^{1-x}$ (c) $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{(y/x)\arctan(y/x)}$

(d) $y^3 = y^2 - x^2$ (e) $y = -x$ (f) $y^2 = 5 \pm 2\sqrt{5}x$

3. (a) $C(x^4 - 3y) = x$ (b) $C^2(3x^3 - 2y) = x$ (c) $C^3(x^6 - 3xy) = 1$

(d) $yx^2 = C^3x^3 - 1$ (e) $xy = 3\ln|x| + C$

(f) $\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2xy+1}{\sqrt{7}} = \ln|Cx|$

4. $x = Ce^{\pm 2\sqrt{y/x}}$

5. $(x-y)^2 - Cy = 0$

6. (a) $3x + y + 2\ln|x + y - 1| = C$ (b) $\ln|4x + 8y + 5| + 8y - 4x = C$

(c) $x^2 + y^2 - xy + y = C$ (d) $8x + y - 1)^3 = C(x - y + 3)$

(e) $(3x - y - 11)^2 = 11(x-3)^2 + C$ (f) $(y - 2x - 3)^2 = C(y - x + 3)$

(g) $\ln|2x - 3| - \frac{4y+5}{2x-3} = C$ (h) $(x + y - 1)^5(x - y - 1)^2 = C$

7. $x^2 = C(2y + C)$

8. $x^2 + y^2 = Cx$

## BÖLÜM 2.6

1. (a) $y = Ce^{-\cos x} - \cos x + 1$ (b) $y = Cx + x^2$

(c) $y = Ce^{-ax} + \dfrac{1}{m+a}e^{mx}$, eğer $m \neq -a$ $y = e^{-ax}(C + x)$, eğer $m = a$

(d) $y = (x+1)^2(x + C)$

(e) $a = -1$ için $y = Cx + bx\ln|x|$, $(x \neq 0)$ $a \neq -1$ için $y = \dfrac{C}{|x|^a} + \dfrac{bx}{1+a}$ $(x \neq 0)$

(f) $y = Cx^2e^{1/x} + x^2$ (g) $y = (1 + x^2)(x + C)$

(h) $y = Ce^2y + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{4}$ (i) $x = y\ln y + \dfrac{C}{y}$

2. (a) $y = \dfrac{1}{x^2}(C - \cos x)$ (b) $y = \dfrac{1}{2x}e^{-2x}(C + x^2)$

(c) $x^n y = ax + C$ (d) $y = x^n(e^x + C)$

(e) $y = \sin x + Ce^{-\sin x} - 1$ (f) $y = ax + Cx\sqrt{1 - x^2}$

(g) $y = e^x(\ln|x| + x^2/2) + Ce^x$

(h) $y = \tan(x/2)[(1/2)x + (1/4)\sin 2x + C]$

(i) $x = Cy^2 + y^4/2$ (j) $x = 1/[y(y + C)]$

(k) $x = e^{-ay}(C + y)$, eğer $b = a$ ise; $x = \dfrac{1}{b-a}e^{-ay} + Ce^{-by}$, eğer $b \neq a$ ise.

(l) $x = y^2\left(\dfrac{a}{b}e^{by} + C\right)$

3. (a) $y = e^{-\arcsin x} + \arcsin x - 1$ (b) $y = -\cos x$

(c) $x^2 + y^2 = e^{-y}$

(d) $y = (e^x + ab - e^a)/x$

(e) $y = \dfrac{x}{x+1}(x - 1 + \ln|x|)$

(f) $x = t \arctan t$

6. $x + y^2 = Cy$

7. $xy = C$

8. (a) $y = 0, y = e^{-x}(e^{-2x} + C)^{-1/2}$

(b) $y = 0, y(1 + \ln x + Cx) = 1$

(c) $y = 0, y = -\dfrac{3}{x(x^3+3)}$

(d) $y^2 = Ce^{-2x} + x - 0.5$

(e) $y = 0, y(x + C) = \sec x$

(f) $y^3 = Ce^{-x} - x + 1$

(g) $y = 0, y = (Ce^x - 2x - 1)^{-1/3}$

(h) $y = 0, y = (Cx^8 + 2x^{10})^{-1/4}$

(i) $y^2 = Ce^{-x^2} + 1$

(j) $y = 0,\ xy^{-1} + y + \ln|y| = C$

9. $y^2 = 2x^2(C - \ln|x|)$

10. $y^2 e^{x^2/y^2} = C$

11. (a) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3x^2}{C - x^3}$

(b) $y = x + \dfrac{e^{-x^2}}{C + \int e^{-x^2}\,dx}$

(c) $y = x + 1 + \exp\left(\dfrac{x^2}{2} + 2x\right)\left[C - \int \exp\left(\dfrac{x^2}{2} + 2x\right)dx\right]^{-1}$

## BÖLÜM 2.7

1. $C(x - y)^2 + 2xy - x^2 = 1$

2. $C(x + y)^2 - x^2 = 1$

3. $C(x - y)^2 + x^2 = 1$

4. $C\sqrt{x^2 + y^2} + y = 1$

5. $C(x^{3/2} + y^{3/2})^{5/2} - x^2 = 1$

6. $C(x+y)^{3/2} - x^{3/2} = 1$

7. $(x^2 - y)^2 = C(x^2 + y^2)$

8. $x - Ce^{y/x} = 1$

9. $x^3 + xy^2 + 2y = C$

10. $x^2 e^{y/x} = C(x+y)$

## BÖLÜM 2.8

3. $m = 1, \alpha \neq 0$ için $\frac{1}{\alpha} e^{\alpha xy} - \cos x + \sin y = C, \alpha = 0$ için $xy - \cos x + \sin y = C$

4. $\forall m \in R,\ xy^4 + mx^2 y + x^2 + 2y^2 - 3y = C$

5. $\varphi(x) = 2(\sin x - x\cos x) + c,\ \frac{x^3}{3} + y^2(\sin x - x\cos x) + \sin y + 2cy = C$

6. (a) $x + y + \frac{1}{2}x^2 y^2 = C$

(b) $xy + \frac{x^3}{3} - \frac{y^4}{2} = C$

(c) $xy - \cos x + \sin y = C$

(d) $\frac{x^2}{2}\sin y + \frac{y^3}{3} + \sin x = C$

(d) $e^{x+y} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2y = C$

(e) $x^2 + y^2 + 2\arctan\frac{x}{y} = C$

(f) $(x^2 + y^2)^2 - 4xy = c$

(g) $x + ye^{x/y} = C$

7. (a) $x^3 + 3(x^2\cos y + x^3 y + e^y - e^3) = 0$

(b) $x^3 + 3(2x^2 y + y^2 - \cos x + \sin y + 1) = 0$

(c) $4x^4 y^3 + x^3 + 3x^2 - y^2 + 10y = 52$

(d) $x^2 + x + y^3 - 2y + \sin xy + 1 = 0$

8. (a) $\mu = x^{-2}, xy^2 - \frac{1}{x} = C$

(b) $\mu = y^2, 2x^3 y^3 + y^6 = C$

(c) $\mu = x^{-2},\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{x} = C$

(d) $\mu = y^{-1/3}$, $\frac{3}{2}x^2y^{2/3} + \frac{3}{8}y^{8/3} + \frac{9}{5}y^{5/3} = C$

(e) $\mu = x^{-1}y^{-1}$, $\frac{x^4y^4}{4} - 5\ln|x| + 3\ln|y| = C$

(f) $\mu = x^{-1}y^{-1}$, $xy + 3\int \frac{\sin x}{x}dx - 4\int \frac{\cos y}{y}dy = C$

9. (a) $x - \frac{y}{x} = C$ (b) $x^2 + 2\frac{x}{y} = C$ (c) $x^2 + y - \frac{x}{y}\ln y = C$

(d) $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} = C$ (e) $e^x(x\sin y - \sin y + y\cos y) = C$

10. (a) $x^2 - y^2 - 1 = Cx$ (b) $\frac{x^3y^3}{3} - 3\ln\left|\frac{y}{x}\right| = C$

(c) $x^2 + y^2 = C(y-1)^2$ (d) $x^2y + 2xy^2 + y^3 + \ln|x+y| = C$

## BÖLÜM 2.9

1. (a) $(x, 0), y = 0$ (b) $(x, 0), y = 0$

(c) $(x, 2), y = 2$ (d) $(x, 0)$, tekil çözüm yoktur.

## BÖLÜM 2.10

1. (a) $y = -\frac{x^2}{2} + C_1$, $y = \frac{3x^2}{2} + C_2$

(b) $y = -4(x\ln x - x) + C_1$, $y = 2(x\ln x - x) + C_2$

(c) $y = \frac{x^2}{2} + C_1$, $y = C_2e^x$

(d) $y = 2\cos x + C_1$, $y = 3\cos x + C_2$

(e) $y = x + C_1$, $y = -\frac{3}{2}x^2 + C_2$, $y = -\frac{1}{2}x^2 + C_2$

**(r)** $y^2 = Ce^{-2x} + \frac{2}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x$

**(s)** $x = y^2(1 + Ce^{1/y})$

**(t)** $\ln|1 + y| - \frac{1+y}{x} = C$

**(u)** $y = x \exp C^x$

**(v)** $x\ y = Ce^{y/a}$

**(y)** $x(1 + y) = Cy$

**(z)** $(y - Cx)(y^2 - x^2 + C) = 0$

**(za)** $x^y = C$

**(zb)** $\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = C$

**(zc)** $(x^2 + y^2)e^x = C$

**(zd)** $(x \sin y + y \cos y - \sin y)e^x = C$

**(ze)** $y = Cx + \frac{1}{C^2}$ $y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x^2}$ (tekil çözüm)

**(zf)** $4x^2 + y^2 = Cx^3$

**3.** **(a)** $y = x - 1$

**(b)** $y = x$

**(c)** $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}(2 + x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$

**(d)** $\arctan\frac{y}{x} + \ln(x^2 + y^2) = \frac{\pi}{4} + \ln 2$

**(e)** $y = 2$

**(f)** $\sqrt{2}\sin x + \sin y - \cos y = 0$

**(g)** $x^2 + y^2 = x$

**(h)** $(1 + y)e^{-y} = \ln\frac{1 + e^x}{2} + 1 - x$

**(i)** $y = \frac{5}{3}\exp x^3 - \frac{1}{3}(2 + x^3)$

# 3. BÖLÜM

## BÖLÜM 3.1

1. (a) $y = (x^4 + x^3)/2 + C_1x + C_2$ (b) $y = x^3/6 + (\cos 2x)/4 + C_1x + C_2$

(c) $y = \left[(x^2 - 1)\arctan x - x\ln(1 + x^2)\right]/2 + C_1x + C_2$

(d) $y = x^2(\ln x - 3/2)/2 + C_1x + C_2$

(e) $y = x^4/4! - e^{3x}/27 + C_1x^2 + C_2x + C_3$

(f) $y = x^5/60 + \cos x + C_1x^2 + C_2x + C_3$

(g) $y = C_1x^2 + C_2$ (h) $y = x^3/3 + C_1x^2 + C_2$

(i) $C_1^2y = (C_1^2x^2 + 1)\arctan C_1x + C_1x + C_2$, $2y = k\pi x^2 + C\ (k \in Z)$

(j) $y = (x + C_1)^3/12 + C_2$ (k) $y = (C_1x - C_1^2)e^{x/C_1+1} + C_2$

(l) $y = \pm a\arcsin(C_1e^{x/a} + C_2)$ (m) $y = C_1(x + C_2)^{2/3}$

(n) $y = C_1e^{x/a} + C_2e^{-x/a}$ (o) $y = \dfrac{x + C_1}{x + C_2}$

(p) $y = C_1e^{C_2x}$ (r) $y\cos^2(x + C_1) = C_2$

(s) $y = C_1x^2/2 + C_2x + C_3 - C_1^2(x + C_1)\ln|x + C_1|$

(t) $y = (C_1 - 2x)^{3/2}/3 + C_2x + C_3$

(u) $y = C_3 - (x + C_1)\ln|x + C_1| + C_2x$

(v) $y = (x^3 + 6x^2)/12 + C_1\ln|x| + C_2x + C_3$

(y) $y = C_1x^5 + C_2x^3 + C_3x^2 + C_4x + C_5$

2. (a) $y = (x-2)e^x + x + 3$ (b) $y = 2(x^2\sqrt{2x} - 8)/5$

(c) $y = -\int_0^x e^{-x^2}\,dx$ (d) $y = 2 + \ln(x^2/4)$

(e) $y = 4/(x+4)^2$ (f) $y = \sqrt{2x - x^2}$

(g) $y = -\ln|1-x|$ (h) $y = (x+1)/x$

## BÖLÜM 3.2

1. (a) bağımsız (b) bağımsız (c) bağımlı

(d) bağımsız (e) bağımsız (f) bağımsız

(g) bağımsız

2. (a) $y'' - y = 0,\ y = C_1e^{-x} + C_2e^x$

(b) $y'' - 4y' + 4y = 0,\ y = e^{2x}(C_1 + C_2x)$

(c) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,\ y = C_1x + C_2x^2$

(d) $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0,\ y = C_1x^3 + C_2x^4$

(e) $(x\cos x - \sin x)y'' + xy'\sin x - y\sin x = 0,\ y = C_1x + C_2\sin x$

(f) $y''' + y' = 0,\ y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x$

3. (a) $y_2 = e^{-3x},\ y = C_1e^x + C_2e^{-3x}$ (b) $y_2 = e^{-3x},\ y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$

(c) $y_2 = (\cos x)/x,\ y = C_1(\sin x)/x + C_2(\cos x)/x$

(d) $y_2 = \left(x\ln|(1+x)/(1-x)|\right)/2 - 1,\ y = C_1x + C_2\left[\left(x\ln|(1+x)/(1-x)|\right)/2 - 1\right]$

## BÖLÜM 3.3

1. (a) $y'' - 4y' + 3y = 0,\ y = C_1e^x + C_2e^{3x}$ (b) $y'' - 4y' = 0,\ y = C_1 + C_2e^{4x}$

(c) $y'' + y' - 6y = 0,\ y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$ (d) $y'' - 4y' + 4y = 0,\ y = e^{2x}(C_1 + C_2x)$

(e) $y'' + 4y' + 5y = 0,\ y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

(f) $y'' + 9y = 0,\ y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2. (a) $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x}$ (b) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$

(c) $y = C_1 e^{-(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{-(1-\sqrt{2})x}$ (d) $y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x)$

(e) $y = e^{4x}(C_1 + C_2 x)$ (f) $y = e^{-3x/2}[C_1 \cos(\sqrt{3}x)/2 + C_2 \sin(\sqrt{3}x/2)]$

(g) $y = e^{x}[C_1 \cos(x/2) + C_2 \sin(x/2)]$

(h) $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

(i) $y = C_1 e^{-(3+\sqrt{11})x} + C_2 e^{-(3-\sqrt{11})x} + C_3 e^{x}$

(j) $y = C_1 e^{x} + e^{2x}(C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x)$

(k) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$

(l) $y = (C_1 + C_2 x)\cos\sqrt{3}x + (C_3 + C_4 x)\sin\sqrt{3}x$

(m) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + e^{-x}(C_4 + C_5 x)$

(n) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + e^{x/2}[C_3 \cos(\sqrt{3}x)/2 + C_4 \cos(\sqrt{3}x)/2]$

$+ e^{-x/2}[C_5 \cos(\sqrt{3}x)/2 + C_6 \cos(\sqrt{3}x)/2]$

(o) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + [C_3 \cos(\sqrt{3}x)/2 + C_4 \cos(\sqrt{3}x)/2]e^{x/2}$

$+ [C_5 \cos(\sqrt{3}x)/2 + C_6 \cos(\sqrt{3}x)/2]e^{-x/2}$

(p) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + e^{x}(C_4 + C_5 x + C_6 x^2)$

(r) $y = e^{x}(C_1 + C_2 x) + (C_3 + C_4 x)\cos x + (C_5 + C_6 x)\sin x$

3. (a) $y = 4e^{x} + 2e^{3x}$ (b) $y = (7 - 3x)e^{x-2}$ (c) $y = e^{x}$

(d) $y = 3e^{-2x} \sin 5x$ (e) $y = \cos x$ (f) $y = 2 + e^{-x}$

## BÖLÜM 3.4

1. (a) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + a$ (b) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2$

(c) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^{x}/2$ (d) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + 3x$

(e) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - (x \cos x)/2$

(f) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \cos x + \sin x \ln|\sec x|$

(g) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \cos x + x \sin x \ln|\sin x|$

(h) $y = C_1 + C_2 e^x + \ln|\sec x|$

(i) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^x - x^4/4 - 3x^2$

(j) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln|\tan(\pi/4 - x/2)| - \sin x \cos x$

(k) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + 2\cosh x \cdot \arctan e^x$

(l) $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + xe^{-x} \ln|x|$

(m) $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \dfrac{1}{x} + \cos x \cdot \ln|\cos x| + \sin x \cdot (x - \tan x)$

(n) $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^x + x^3 e^x/6$

(o) $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + C_3 e^x - x + 2x - 4$

2. (a) $y = C_1 x + C_2 x^2 - x \sin x$ (b) $y = C_1 + C_2 x^2 + \dfrac{x^2+1}{x}$

(c) $y = x(C_1 + C_2 \ln x)x + \ln^3 x$

3. (a) $y = \cos x - \sin x + x$ (b) $y = (1-a)\cos x + \sin x \cdot \ln\left|\tan \dfrac{x}{2}\right|$

(c) $y = [1 - ey_0' + (ey_0 + ey_0' - 1]e^{-x} + xe^{-x} \ln x$

(d) $y = \dfrac{y_0 - y_0'}{2} e^{-(x-x_0)} + \dfrac{y_0 + y_0'}{2} e^{(x-x_0)} - \dfrac{1}{2} e^{-x} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt + \frac{1}{2} e^x \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$

## BÖLÜM 3.5

1. (a) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - x^2 - 2x + 1$ (b) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 3x^2 - 2x - 5$

(c) $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + 3x$ (d) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + 2x^3/3 - 7x^2/2 + 11x$

(e) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + 4xe^x$ (f) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + e^x - 1$

(g) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + 3e^{2x} + x^2 + 3x + 7/2$

(h) $y = C_1e^{-5x} + C_2e^{2x} + (1 - 12x)e^{-2x}/144$

(i) $y = C_1e^{4x} + C_2e^{5x} + (x^3 + 3x^2 + 6x)e^{4x}/3$

(j) $y = (C_1 + C_2x)e^{mx} + (\cos mx)/2m^2$

(k) $y = (C_1 + C_2x)e^{mx} + \left[(m^2 - n^2)\sin nx + 2mn\cos nx\right]/(m^2 + n^2)^2$

(l) $y = C_1\cos x + C_2\sin x + (x - 1)e^x/2 + e^{-x}$

(m) $y = C_1e^{-x} + C_2e^x - x/2 - (x\cos 2x)/10 + (2\sin 2x)/25$

(n) $y = C_1e^{-x/2} + C_2e^{x/2} - x^3$

(o) $y = C_1e^{-4x} + C_2e^x - xe^{-4x}/5 - (6x + 1)e^{-x}/36$

(p) $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-2x} - x(x + 1)/4 - xe^x/3$

(r) $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + xe^{-x} + x^3 - 3x^2$

(s) $y = C_1e^x + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x + 3e^{2x}/8 - (x\cos 2x)/5 + (2x\sin 2x)/5$

(t) $y = C_1 + C_2x + C_3\cos x + C_4\sin x + x^4/6 - 3x^2/2$

(u) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5e^{-x} + 2xe^{-x}/6 + x^4/8$

(v) $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3\cos x + C_4\sin x + x\cos x + 2xe^{-x} - 1$

(y) $y = (C_1 + C_2x)\cos 2x + (C_3 + C_4x)\sin 2x + (\cos x)/9$

(z) $y = (C_1 + C_2x)\cos ax + (C_3 + C_4x)\sin ax + (x^2\cos ax)/8a^2$

(za) $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3\cos x + C_4\sin x + (x^2 - 3x)e^x/8 - (x\sin x)/4$

(zb) $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + (C_3 + C_4x)e^x + x^2e^{-x} + x^2e^x + \sin x + \cos x$

2. (a) $y = \cos 2x - \sin 2x + \sin x$ (b) $(2\sin 3x)/3 + x$

(c) $e^x(0.16\cos 3x + 0.28\sin 3x) + x^2 + 2.2x + 0.84$

(d) $y = e^x(e^x - x^2 - x + 1)$ (e) $y = (\sin 2x - \sin x)/3 - \cos x$

(f) $y = (e^{-x} - xe^{-x} - \cos x)/2$ (g) $y = x^3/6 - x^2/2 + 2x - 4 + e^{-x}$

(h) $y = 1 - (\sin x + \cos x + e^{-x})/2$ (i) $y = \cosh x - (x^2 - 1)/2$

(j) $y = ax^2/2 + (1-a)x + a - 1 + (1-2a)e^{-x}/2 + (\cos x - \sin x)/2$

## BÖLÜM 3.6

1. (a) $y = \sin t, A = 1, \beta = 1, T = 2\pi, \varphi_0 = 0$

(b) $y = -\sin(t + \pi/2), A = -1, \beta = 1, T = 2\pi, \varphi_0 = \pi/2$

(c) $y = \sqrt{2}\sin(t + \pi/4), A = \sqrt{2}, \beta = 1, T = 2\pi, \varphi_0 = \pi/4$

(d) $y = \sqrt{2}\sin(t - \pi/4), A = \sqrt{2}, \beta = 1, T = 2\pi, \varphi_0 = -\pi/4$

(e) $y = (\sqrt{5}/2)\sin(2t + \varphi_0), A = \sqrt{5}/2, \beta = 2, T = \pi, \varphi_0 = \arctan 2$

(f) $y = (\sqrt{5}/2)\sin(2t + \varphi_0), A = \sqrt{5}/2, \beta = 2, T = \pi, \varphi_0 = -\arctan 2$

(g) $y = \sin 3t, A = 1, \beta = 3, T = 2\pi/3, \varphi_0 = 0$

(h) $y = (\sqrt{82}/3)\sin(3t - \varphi_0), A = \sqrt{82}/3, \beta = 3, T = 2\pi/3, \varphi_0 = \arctan 9$

2. (a) $y = (3/4)e^{-2t} + (6/5)e^{-x} - (3\sqrt{10}/2)\sin(2t + \arctan 3)$, $t > t_0$ için

$y_{t_0} = -(3\sqrt{10}/2)\sin(2t + \arctan 3)$

(b) $y = e^{-t} + (1/2)\sin 2t$, $t > t_0$ için $y_{t_0} = (1/2)\sin 2t$

(c) $y = (1/2)\sin 2t$, salınım hareketi

(d) $y = (3/2)(\sin t - t\cos t)$, rezonans olayı

(e) $y = \cos t + t\sin t$, rezonans olayı

(f) $y = 3\sin t(1 - 2t)\cos t$, rezonans olayı

(g) $y = (\sqrt{10}/3)\sin(3t - \arctan 3) + 2\cos t$, salınım hareketi

(h) $y = -(2\sqrt{3}/3)\sin(\sqrt{3}t + \pi/3) + 2\cos t$, salınım hareketi

## BÖLÜM 3.7

2. (a) $y = C_1x^{-2} + C_2x^{-1}$ (b) $y = x^{-1}(C_1 + C_2\ln|x|)$

(c) $y = C_1 \cos(2\ln|x|) + C_2 \sin(2\ln|x|)$ (d) $y = C_1 x + C_2 x^2$

(e) $y = C_1 x^2 + C_2 x^3$

(f) $y = |x|^{-3/2}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right)\right]$

(g) $y = x^2(C_1 + C_2 \ln|x|)$ (h) $y = C_1 + C_2 x^4$

(i) $y = |x|^{1/2}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right)\right]$

(j) $y = C_1 + C_2 \ln|x| + C_3 x^3$

(k) $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$

3. (a) $y = x^2(1 - 4\ln x)$ (b) $y = -\cos(2\ln x) + 2\sin(\ln x)$

(c) $Y = \frac{1}{4}(3x + x^{-1}) + \frac{1}{2}\left[(x - x^{-1})\ln(x+1) - \ln x - 1\right]$

(d) $Y = (1 - \ln x)\cos(\ln x) + \sin(\ln x)$

4. (a) $y = (x+3)^{-1}(C_1 + C_2 \ln|x+3|)$ (b) $y = C_1(x-1)^{-3} + C_2(x-1)$

(c) $y = C_1(2x+1)^{-1} + C_2(2x+1)$

(d) $y = C_1(x+2) + C_2|x+2|^{1-\sqrt{3}} + C_3|x+2|^{1+\sqrt{3}}$

(e) $y = C_1(x-2)^2 + |x-2|^{1/2}\left[C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln|x-2|\right) + C_3 \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln|x-2|\right)\right]$

(f) $(x+3)^{-1}(C_1 + C_2 \ln|x+3|) + C_3(x+3)^2$

5. (a) $y = C_1 \cos\ln|x| + C_2 \sin\ln|x| + x/2$ (b) $y = C_1 x + C_2 x \ln x + x \ln^3 x$

(c) $y = C_1 + C_2 x + x + 1/x$

(d) $y = C_1 \cos\ln x + C_2 \sin\ln x - x\ln x \cos\ln x$

(e) $y = C_1 x + C_2 x \ln|x| + x\ln^2|x|$ (f) $y = C_1 x + C_2 x^2 + x\ln|x| + x^3$

## BÖLÜM 3.8

1. (a) $x'' + x = 0,\ x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$

   (b) $x'' - 5x' + 4y = 0,\ x = C_1 e^t + C_2 e^{4t},\ \ y = -C_1 e^t + \frac{1}{2} C_2 e^{4t}$

   (c) $x'' - 11x = 0,\ x = C_1 e^{-\sqrt{11}t} + C_2 e^{\sqrt{11}t},\ y = -\frac{\sqrt{11}+3}{2} C_1 e^{-\sqrt{11}t} + \frac{\sqrt{11}-3}{2} C_2 e^{\sqrt{11}t}$

   (d) $x'' + x = t,\ x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t, y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$

2. (a) $x = C_1 e^{-2t}, y = C_2 e^t$ (b) $x = \frac{1}{2} C_1 e^{2t} + C_2, y = C_2 e^{2t}$

   (c) $x = C_1 t, y = C_2 e^t - C_1(t+1)$

   (d) $x = e^{2t}(C_3 + C_2 t + \frac{1}{2} C_1 t^2),\ y = e^{2t}(C_2 + C_1 t),\ z = C_1 e^{2t}$

3. (a) $x_1 = 4C_1 e^{-3t} + 2C_2 e^{3t}, x_2 = -C_1 e^{-3t} + C_2 e^{3t}$

   (b) $x_1 = e^{12t}(C_1 \cos 5t + C_2 \sin 5t),\ \ x_2 = e^{12t}(C_2 \cos 5t - C_1 \sin 5t)$

   (c) $x_1 = 2C_1 \cos t + 2C_2 \sin t,\ x_2 = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t$

   (d) $x_1 = 2e^t(C_2 \cos 5t - C_1 \sin 5t),\ x_2 = e^t(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$

   (e) $x_1 = e^t(C_1 t + C_2), x_2 = e^t(C_1 - 2C_2 - 2C_1 t)$

   (f) $x_1 = e^t(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t),\ x_2 = e^t(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t)$

   (g) $x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{5t},\ x_2 = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}$

   (h) $x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t},\ \ x_2 = C_1 e^t - 3C_3 e^{-t},\ \ x_3 = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - 5C_3 e^{-t}$

   (i) $x_1 = C_1 + 3C_2 e^{5t},\ x_2 = -C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t},\ x_3 = C_1 + C_2 e^{5t} - 2C_3 e^{-t}$

4. (a) $x_1 = e^{-t}(\cos t - \sin t),\ x_2 = e^{-t}(3 \sin t - \cos t)$

   (b) $x_1 = -e^{-2t},\ x_2 = e^{-2t}$ (c) $x_1 = 3e^{2t},\ x_2 = e^{2t}$

   (d) $x_1 = e^{5t}(\cos 2t - \sin 2t),\ x_2 = 2e^{5t} \sin 2t$

   (e) $x_1 = x_2 = x_3 = e^t$ (f) $x_1 = e^{-t} + e^{2t};\ x_2 = e^{-t} + e^{2t};\ \ x_3 = -2e^{-t} + e^{2t}$

## BÖLÜM 3.9

1. (a) $y = (1-\pi/2)\sin x + x$, tek çözüm

   (b) $y = C\sin x + x$, sonsuz sayıda çözüm

   (c) Çözüm yoktur

2. (a) $y = \cos x - \sin x$

   (b) $y = \dfrac{1}{e^2-1}\left[e(e-2)e^{-x} + (2e-1)e^{x}\right]$

   (c) $y = e^{2x} - 1$

   (d) $y = e^{x} - e^{-2x}$

   (e) $y = -e^{-x} + (1-e)xe^{-x} + 1$

   (f) $y = \dfrac{2}{1-e^{-10}}(e^{-4x} - e^{x}) + xe^{x}$

   (g) $y = \dfrac{4e-3}{e-e^{-1}}e^{-x} + \dfrac{3-4e^{-1}}{e-e^{-1}}e^{x} - x - 3$

   (h) $y = \dfrac{4}{5}\cos 2x + \dfrac{4}{5}e^{\pi/4}\sin 2x + \dfrac{1}{5}e^{x}$

   $$\lambda_n = \left[\frac{\pi}{2l}(2n-1)\right]^2, \varphi_n(x) = \cos\frac{\pi}{2l}(2n-1)x, n = \overline{1,\infty}$$

   (i) $y = -\dfrac{1}{1-e^{-2}}e^{-x} + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + \dfrac{2-e^{-2}}{1-e^{-2}}$

   (j) Çözüm yoktur

   (k) $y = -\cos x + C\sin x + 2x + 1$, sonsuz sayıda çözüm

## BÖLÜM 3.10

1. $\lambda_n = \left[\dfrac{\pi}{2l}(2n-1)\right]^2, \varphi_n(x) = \cos\dfrac{\pi}{2l}(2n-1)x, n = \overline{1,\infty}$

2. $\lambda_n = \left[\dfrac{\pi}{2l}(2n-1)\right]^2, \ \varphi_n(x) = \sin\dfrac{\pi}{2l}(2n-1)x, n = \overline{1,\infty}$

3. $\lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2, \ \varphi_n(x) = \cos\dfrac{\pi n}{l}x, n = \overline{0,\infty}$

4. $\lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2, \ \varphi_n(x) = e^{-x}\sin\dfrac{\pi n}{l}x, n = \overline{1,\infty}$

5. $\lambda_0 = 0,\ \lambda_n = \left[\frac{\pi}{4l}(2n-1)\right]^2,\ \varphi_0(x) = 1,\ \varphi_n(x) = \sin\frac{\pi}{4l}(2n-1)\ln|x|,\ n = \overline{1,\infty}$

6. $\lambda_n = \left[\frac{\pi}{4l}(2n-1)\right]^2,\ \varphi_n(x) = \cos\frac{\pi}{4l}(2n-1)\ln|x|,\ n = \overline{1,\infty}$

7. $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{2l}\right)^2,\ \varphi_n(x) = \sin\frac{\pi n}{2l}\ln|x|,\ n = \overline{1,\infty}$

## BÖLÜM 3.11

1. (a) Asimptotik kararlı (b) Kararsız (c) Kararsız
   (d) Kararlı, asimptotik kararsız (e) Kararlı, asimptotik kararsız
   (f) Kararlı, asimptotik kararsız

2. (a) Kararsız (b) Kararlı (c) Kararsız
   (d) Asimptotik kararlı (e) Kararsız (f) Asimptotik kararlı
   (g) Kararsız (h) Asimptotik kararlı (i) Kararsız

3. (a) $a \in (-\infty,0)$ 'da kararlı, $a \in [0,\infty)$ 'da kararsız
   (b) $a \in (-\infty,0)$ 'da asimptotik kararlı, $a = 0$ 'da kararlı, asimptotik kararsız, $a > 0$ 'da kararsız
   (c) $a \in (-\infty,-1/2)$ 'de asimptotik kararlı, $a = -1/2$ 'de kararlı, asimptotik kararsız, $a \in (-1/2,\infty)$ 'da kararsız

## 3. BÖLÜM İÇİN

1. (a) $y = \ln|\sin x| + C_1x^2 + C_2x + C_3$

   (b) $y = \frac{x^4}{48} - \frac{1}{32}\cos 2x + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$

   (c) $y = \frac{e^{ax}}{a^{10}} + C_1x^9 + C_2x^8 + \ldots + C_9x + C_{10}$

   (d) $y = (\arcsin x)^2 + C_1\arcsin x + C_2$

   (e) $y = (1 + C_1^{-2})\ln|1 + C_1x| - C_1^{-1}x + C_2$ (f) $y = C_1e^{C_2x},\ y = C$

(g) $y = \frac{1}{2}\ln^2|x| + C_1 \ln|x| + C_2$

(h) $y = C_1 e^{C_2 x} + \frac{1}{C_2}, y = C$

(i) $y = \pm\frac{1}{2}\left(x\sqrt{C_1^2 - x^2} + C_1^2 \arcsin\frac{x}{C_1}\right) + C_2$

(j) $y = C_1 x(x - C_1) + C_2, y = \frac{x^3}{3}C$ (tekil çözüm)

(k) $y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1 \ln|x| + C_2 x + C_3$

(l) $y = -\sin(x + C_1) + C_2 x + C_3$

2. (a) $y = x^3 + 3x + 1$

(b) $y = \frac{2}{5}x^2\sqrt{2x} - \frac{16}{5}$

(c) $y = x + 1$

(d) $(3 - x)y^5 = 8(x + 2)$

(e) $y = \exp\frac{x^2}{2}$

(f) $y = \tan x, \ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

3. (a) $y_1 = C_1 x \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 2C_1 + 2C_2 x$

(b) $y = C_1\frac{\sin x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x}$

(c) $y = C_1 e^{2x} + C_2(2x^2 + 2x + 1)$

(d) $y = C_1 x + C_2(x^2 - 1)$

4. (a) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x/3}$

(b) $y = C_1 e^{x/2} + C_2 e^{3x/2}$

(c) $y = (C_1 + C_2 x)e^{5x/3}$

(d) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{4x}$

(e) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x} + C_4 e^{3x}$

(f) $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x)e^{-x}$

(g) $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x + C_5 x^2)\cos(x/2) + (C_6 + C_7 x + C_8 x^2)\sin(x/2)$

(h) $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_n x^n)e^{-x}$

5. (a) $y = e^{-x/2}\left[\cos(\sqrt{3}x/2) + \sin(\sqrt{3}x/2)/\sqrt{3}\right]$

(b) $y = 1$

(c) $y = 1 - e^{-x}$

(d) $y = 1 + \cos x$

(e) $y = -2 + e^x + \cos x$

(f) $y = \sin x$

**6.** **(a)** $\tilde{y} = (Ax + B)e^{-2x}$ **(b)** $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C)e^{x}$

**(c)** $\tilde{y} = A\sin\beta x$ eğer $\beta \neq m$ $\tilde{y} = x(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ eğer $\beta = m$

**(d)** $\tilde{y} = x(Ax + B)e^{x}$ **(e)** $\tilde{y} = x^2(Ax^2 + Bx + C)e^{-2x}$

**(f)** $\tilde{y}_1 = x(Ax + B)e^{-3x}$ $\tilde{y}_2 = C\cos 3x + D\sin 3x$

**(g)** $\tilde{y}_1 = Ax^2 + Bx + C$ $\tilde{y}_2 = Axe^{3x}$ $\tilde{y}_3 = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$

**7.** **(a)** $y = C_1e^{-x} + (C_2 + x/2)e^{x}$ **(b)** $y = (C_1 + C_2x + 2x^2)e^{x}$

**(c)** $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{x} - (2\cos 2x)/5 - (6\sin 2x)/5$

**(d)** $y = x^3 + 9x^2/2 + 21x/2 - 15/4$

**(e)** $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} - 8e^{x}[\cos(x/2) + 2\sin(x/2)]$

**(f)** $y = C_1 + C_2e^{-5x/2} + x/10 - (4\cos 2x - 5\sin 2x)/164$

**(g)** $y = (C_1 + C_2x - 1/8)e^{-x} + (\cos x)/2 + x^2e^{x}/4$

**(h)** $y = e^{3x/5}[(C_1 - x/8)\cos(4x/5) + C_2\sin(4x/5)]$

**(i)** $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + e^{x} - e^{x-1}/2 + e^{1-x}/18$

**(j)** $y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x - (x^2\cos x)/8$

**(k)** $y = C_1 + C_2x + C_3\cos x + C_4\sin x + x^2(x^2 + 2x - 12)/12$

**(l)** $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5e^{x} + x^4/24 + (x^2/2 - 4x)e^{x}$

**8.** **(a)** $y = x^2 + e^{x}$ **(b)** $y = e^{2x-1} - 2e^{x} + e - 1$

**(c)** $y = 2e^{x} + 2\cos x - 5\sin x$ **(d)** $y = 1 - e^{-x} + e^{x} + x^2$

**(e)** $y = 2 - 4e^{x}(1 - 2x)/3 - 2e^{-x/2}\left[\cos(\sqrt{3}x/2) + \sin(\sqrt{3}x/2)/\sqrt{3}\right]/3$

**9.** **(a)** $y = (C_1 + C_2x)e^{x} + 1/x$ **(b)** $y = C_1 + C_2e^{x} + e^{x}/x$

**(c)** $y = C_1 + C_2e^{x} - 4\sqrt{x}(2x/3 + 1)$

**(d)** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + 2 + \cos x\ln|\tan(x/2)|$

(e) $y = (C_1 + C_2 x - \ln\sqrt{x^2+1} + x\arctan x)e^x$

(f) $y = C_1 + (C_2 + x)e^x - (e^x + 1)\ln(e^x + 1)$

**10.** (a) $0 < \lambda < 1$ (b) $\lambda > 1$

**11.** (a) $y = C_1\sqrt{x} + C_2/\sqrt{x}$ (b) $y = x^2(C_1 + C_2 \ln x)$

(c) $y = C_1 \cos\ln x + C_2 \sin\ln x$ (d) $y = C_1 + C_2 x^2 + C_3 x^4$

(e) $y = C_1(x+1) + C_2(x+1)^2$ (f) $y = (2x+1)(C_1 + C_2 \ln|2x+1|)$

(g) $y = C_1 \cos(2\ln x) + C_2 \sin(2\ln x) + 2x$ (h) $y = C_1 x^3 + C_2/x^2 - 2\ln x + 1/3$

**12.** (a) $x = 2/(2C_1 - t^2)$ $y = t(C_2 - \ln t)$

(b) $x = C_1 t^2 + 1/4C_1$, $y^3/3 - ty - C_1 t^3/3 - t/(4C_1) = C_2$

(c) $x = C_2 e^{C_1 t}$ $y = C_1 C_2 e^{C_1 t}$

(d) $x = C_2 e^{-4t} + C_1/4$ $y = -5C_2 e^{-4t} - C_1/4$

**13.** (a) $x = C_1 + C_2 e^{5t}$ $y = C_1 - 4C_2 e^{5t}$

(b) $x = (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)e^{2t}$ $y = (C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t)e^{2t}$

(c) $x = 3C_1 + C_2 - (2C_1 + C_2)e^{-t}$ $y = -2(3C_1 + C_2) + 3(C_1 + C_2)e^{-t}$

(d) $x = e^{-3t/2}\left[C_1 \cos(\sqrt{15}t/2) + (5C_1 + 2C_2)\sin(\sqrt{15}t/2)/\sqrt{15}\right]$

$y = e^{-3t/2}\left[C_2 \cos(\sqrt{15}t/2) - (20C_1 + 5C_2)\sin(\sqrt{15}t/2)/\sqrt{15}\right]$

(e) $x = 5C_1 \cos 2t + 5C_2 \sin 2t$ $y = (-4C_1 + 2C_2)\cos 2t - (2C_1 + 4C_2)\sin 2t)$

# 4. BÖLÜM

## BÖLÜM 4.2

1. (a) $y_1 = 1.1, y_2 = 1.22, y_3 = 1.362, y_4 = 1.5282, y_5 = 1.7210$

   (b) $y_1 = 1, y_2 = 1.0050, y_3 = 1.0100, y_4 = 1.0252, y_5 = 1.0457$

   (c) $y_1 = 2.6, y_2 = 3.2, y_3 = 3.8, y_4 = 4.4, y_5 = 6$

   (d) $y_1 = 0.1, y_2 = 0.2001, y_3 = 0.3009, y_4 = 0.4027, y_5 = 0.5092$

   (e) $y_1 = 1, y_2 = 0.9909, y_3 = 0.9753, y_4 = 0.9552, y_5 = 0.9322$

   (f) $y_1 = 1.2, y_2 = 1.3733, y_3 = 1.5294, y_4 = 1.6786, y_5 = 1.8237$

   (g) $y_1 = 1, y_2 = 0.99, y_3 = 0.9698, y_4 = 0.9389, y_5 = 0.8965$

   $z_1 = 1, z_2 = 1.01, z_3 = 1.0298, z_4 = 1.0589, y_5 = 1.0845$

   (h) $y_1 = 1, y_2 = 1.02, y_3 = 1.06, y_4 = 1.1206, y_5 = 1.2021$

   $z_1 = 1, z_2 = 0.98, z_3 = 0.9588, z_4 = 0.9140, y_5 = 0.8609$

   (i) $y_1 = 1.1, y_2 = 1.18, y_3 = 1.24, y_4 = 1.27, y_5 = 1.27$

2. (a) $y_1 = 0, y_2 = 0.001, y_3 = 0.005, y_4 = 0.014$

   (b) $y_1 = 4.5, y_2 = 5.0535, y_3 = 5.6538, y_4 = 6.3242$

3. Yanıt olarak, ancak aranan fonksiyonun aralığın sağ ucundaki değeri verilmiştir.

   (a) $y(1) = 1.328$ (b) $y(0.3) = 0.0451$

   (c) $y(1) = 0.3305$ (d) $y(1) = 3.7190$

## BÖLÜM 4.3

1. (a) $y(x) = 1 + x + 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 2e^x - x - 1$ (b) $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k!}{(2k)!} x^{2k+1}$

(c) $y(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k)!}$ (d) $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

(e) $y(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{(2k)!} x^{2k}$

2. (a) $y(x) = C_0 + C_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)} + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2 \cdot 4 \cdots (2k)}$

(b) $y(x) = C_1\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}\right) + C_2\left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}\right)$

3. (a) $y(x) \approx 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4$ (b) $y(x) \approx 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{17}{6}x^3$

(c) $y(x) \approx x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5$ (d) $y(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$

(e) $y(x) \approx 2(x-1) + 2(x-1)^2 + \frac{5}{3}(x-1)^3 + \frac{7}{4}(x-1)^4$

(f) $y(x) \approx 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3$ (g) $y(x) \approx x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4$

(h) $y(x) \approx 1 + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^5$ (i) $y(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4$

(j) $y(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{8}{4!}x^4 + \frac{14}{5!}x^5$

(k) $y(x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$, $z(x) \approx 1 - x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{24}x^4$

(l) $y(x) \approx -1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4$, $z(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4$

4. (a) $y(x) \approx 1 + x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$

(b) $y(x) \approx 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{17}{12}x^4$

(c) $y(x) \approx 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{45}x^6$

(d) $y(x) \approx 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{5}{6!}x^6$

(e) $y(x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{1}{24}x^5$

5. (a) $y(x) = 2(x-1) + 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k = 2(x-1) + 4e^{-x}$

(b) $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{4^k k!} + 3\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+2}}{2^{k+1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}$

(c) $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2 \cdot 4 \cdots (2k)}$

(d) $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2n+1}$

(e) $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!}$

(f) $y(x) = y_0 \left[ 1 + \frac{2x^3}{3 \cdot 2} + \frac{2^2 x^6}{[6 \cdot 5][3 \cdot 2]} + \cdots + \frac{2^k x^{3k}}{[3k(3k-1)][(3k-3)(3k-4)] \cdots [6 \cdot 5][3 \cdot 2]} + \cdots \right]$

(g) $y(x) = y_0' \left[ x - \frac{ax^4}{4 \cdot 3} + \frac{a^2 x^7}{[7 \cdot 6][4 \cdot 3]} + \cdots + \frac{2^k x^{3k+1}}{[(3k+1)(3k)][(3k-2)(3k-3)] \cdots [7 \cdot 6][4 \cdot 3]} + \cdots \right]$

(h) $y(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2^{k-1}(2k+2)!} x^{2k+2}$

(i) $y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}$

(j) $y(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \cdots + \frac{(k-2)x^k}{k!} + \cdots$

**6.** **(a)** $y(x) = Cx^2$ **(b)** $y(x) = C_1 + C_2x^2$

**(c)** $r_1 = 0, \quad r_2 = -1, \quad y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} = \frac{\sin x}{x}, \qquad y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{-1+2k} = \frac{\cos x}{x}$$

**(d)** $r_1 = 0, r_2 = -1, \; y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \; y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k} = \frac{\sinh x}{x},$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{-1+2k} = \frac{\cosh x}{x}$$

**(e)** $r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{1}{2}, \quad y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \; y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^k = \cos\sqrt{x},$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1/2}}{2^k k! 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{(2k+1)/2}}{(2k+1)!} = \sin\sqrt{x}$$

**(f)** $r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{1}{2}, \quad y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2^k k! 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2k}}{(2k)!}^{k} = \cosh\sqrt{x},$$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1/2}}{2^k k! 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh\sqrt{x}$$

**(g)** $r_1 = 0, \quad r_2 = -2, \quad y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k}}{3^k k! 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3k+2)},$$

$$y_2(x) = x^{-2}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k}}{3^k k! 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}\right)$$

**(h)** $r_1 = 0, \quad r_2 = -2, \quad y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{3^k k! 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3k+2)},$$

$$y_2(x) = x^{-2}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k}}{3^k k! 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}\right)$$

**8.** **(a)** $y(x) = C_1J_0(2x) + C_2Y_0(2x)$

**(b)** $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$,

$$y_1(x) = x^{1/2}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} + \cdots\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}},$$

$$y_2(x) = x^{-1/2}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots\right) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

**(c)** $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, $\quad y_1(x) = x^{1/3}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^k x^{2k}}{2^{2k} k! 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k+1)}$,

$$y_2(x) = x^{-1/3}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^k x^{2k}}{2^{2k} k! 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)}\right)$$

**(d)** $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$,

$$y_1(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^k x^{2k}}{2^{2k} k! 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3k+2)}\right)$$

$$y_2(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-2/3}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^k x^{2k}}{2^{2k} k! 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}\right)$$

## 4. BÖLÜM İÇİN

**1.** **(a)** $y_1 = 1.1, y_2 = 1.183, y_3 = 1.252, y_4 = 1.315, y_5 = 1.3684$

**(b)** $y_1 = 1.1, y_2 = 1.221, y_3 = 1.3675, y_4 = 1.5453, y_5 = 1.7616$

**(c)** $y_1 = 1.2, y_2 = 1.45, y_3 = 1.78, y_4 = 1.315, y_5 = 2.2258$

**(d)** $y_1 = 1.1, y_2 = 1.18, y_3 = 1.24, y_4 = 1.27, y_5 = 1.27$

**2.** Yanıtlar sadece son uç için verilmiştir.

**(a)** $y(2) = -0.8407$ **(b)** $y(1) = 0.3635$

**(c)** $y(2) = 2.3683$ **(d)** $y(0.5) = 0.6842$

**3.** Yanıtlar sadece son uç için verilmiştir.

**(a)** $y(2) = 0.25, z(2) = 0.375$ **(b)** $y(0.3) = 1.505, z(0.3)0.577$

**(c)** $y(1) = 1.359$ **(d)** $y(2) = -1.833$

4. (a) $y \approx 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{10}{3}x^4 + \frac{64}{15}x^5$

(b) $y \approx 2 + 5(x-1) + 11(x-1)^2 + \frac{70}{3}(x-1)^3 + \frac{305}{6}(x-1)^4$

(c) $y \approx 1 - x - x^2 - \frac{5}{2}x^3 - \frac{19}{4}x^4$

(d) $y \approx 1 - x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{20}x^5$

(e) $y \approx 1 + 3x + \frac{1}{2}x^2 + 3x^3 - \frac{17}{12}x^4$

5. (a) $y = \left(y_0 + \frac{1}{4}\right)e^{2(x-1)} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

(b) $y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1}{3 \cdot 4}x^4 + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}x^n + \cdots, \quad [-1, 1]$

(c) $y = 4\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{(x-1)^{3k}}{k!}, \quad (-\infty, \infty)$

(d) $y = \frac{\sin x}{x}$

# 5. BÖLÜM

## BÖLÜM 5.1

1. (a) $\frac{5}{s}$ (b) $-\frac{7}{s}$ (c) $\frac{\pi}{s}$

(d) $\frac{1}{s+1}+\frac{8s}{4s^2+1}$ (e) $3\left(\frac{1}{s^2-9}+\frac{3}{s-1}\right)$

(f) $\frac{12}{s^2+16}(1+e^{-3\pi/4})$ (g) $\frac{1}{s+2}(1+e^{-2-s})+\frac{1}{s}$

(h) $\frac{2}{s^2+9}(1+e^{-\pi s/3})+\frac{e^{-\pi(s-2)/3}}{s-2}$ (i) $\frac{s}{2}\left(\frac{1}{s^2+(\alpha+\beta)^2}+\frac{1}{s^2+(\alpha-\beta)^2}\right)$

(j) $\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+\beta}{s^2+(\alpha+\beta)^2}+\frac{\alpha-\beta}{s^2+(\alpha-\beta)^2}\right)$ (k) $\frac{s}{2}\left(\frac{1}{s^2+(\alpha-\beta)^2}-\frac{1}{s^2+(\alpha+\beta)^2}\right)$

(l) $\frac{s}{4}\left(\frac{3}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+9}\right)$ (m) $\frac{1}{8}\left(\frac{3}{s}-\frac{4s}{s^2+4}+\frac{s}{s^2+16}\right)$

(n) $\frac{1}{2}\left[\frac{s-\gamma}{(s-\gamma)^2+\beta^2}-\frac{s+\gamma}{(s-\gamma)^2+\beta^2}\right]$ (o) $\frac{2\beta^2 s}{s^4+4\beta^4}$

2. (a) $-3$ (b) $3e^{-2t}$ (c) $4\cos 2t-\frac{3}{2}\sin 2t$

(d) $e^{-2t}\sin t$ (e) $\frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t})$ (f) $\frac{2\sqrt{3}}{9}e^{t/2}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t$

(g) $\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{15}e^{-t}-\frac{1}{10}\cos 2t-\frac{1}{5}\sin 2t$ (h) $2e^{t}+e^{t/2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

(i) $\frac{3}{2}\sinh 2t+\cos\sqrt{2}t$

## BÖLÜM 5.2

1. (a) $\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}$ (b) $\frac{a}{s^2}+\frac{b}{s}$ (c) $\frac{2}{s^3}+\frac{3}{s^2}+\frac{2}{s}$

(d) $\frac{2a}{s^3}+\frac{b}{s^2}+\frac{c}{s}$ (e) $\frac{3}{s^4}-\frac{12s}{(s^2+9)^2}$

(f) $\frac{2}{3s^3}+\frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}+\frac{12s}{(s^2+4)^2}$ (g) $\frac{2}{(s-1)^3}-\frac{3}{(s+2)^2}+\frac{12s}{(s^2-4)^2}$

(h) $\frac{6s}{(s^2+9)^2}+\frac{3}{s^2+9}$ (i) $\frac{3(s^2-4)}{(s^2+4)^2}+\frac{2s}{s^2+4}$

(j) $\ln\frac{s}{s-1}$ (k) $\ln\frac{s-b}{s-a}$

## BÖLÜM 5.3

1. (a) $e^{-2t}(\cos t+6\sin t)$ (b) $\frac{1}{2}(1+e^{-2t})$

(c) $e^t+e^{2t}(t-1)$ (d) $\frac{c-a}{(b-a)^2}e^{-at}+\left[\frac{c-b}{a-b}+\frac{a-c}{(a-b)^2}\right]e^{-bt}$

(e) $\frac{1}{b^2-a^2}(\cos at-\cos bt)$ (f) $1-e^{-at}-ate^{-at}$

(g) $\frac{1}{2}(\sin t-\cos t)$ (h) $\frac{1}{2}t\sin t$

(i) $\frac{1}{1+\beta^2}(e^t-\cos\beta t+\beta\sin\beta t)$

(j) $\frac{1}{3}e^{t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\frac{1}{3}e^{-t}$ $\frac{1}{39}(3-3e^{-2t}\cos 3t-2e^{-2t}\sin 3t)$

(k) $\frac{1}{1+\beta^2}(\beta e^t-\beta\cos\beta t-\sin\beta t)$ (l) $1-e^{-t}-te^{-t}$

(m) $\frac{1}{3}te^t-\frac{1}{3}te^{-t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

(n) $e^{-3t}\dfrac{\sinh \beta t}{t}$ (o) $e^{2t}\dfrac{\sinh \beta t}{t}$

2. (a) $\dfrac{3}{s^2}+\dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}+\dfrac{2}{s}$

(b) $\dfrac{6}{s^4}+\dfrac{45\sqrt{\pi}}{8}\dfrac{1}{s^{7/2}}+\dfrac{3\sqrt{\pi}}{2}\dfrac{1}{s}+\dfrac{3\sqrt{\pi}}{2}\dfrac{1}{s^{5/2}}+\dfrac{1}{s}$

(c) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\dfrac{1}{(s-1)^{3/2}}$ (d) $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\sqrt{\pi}}{2^4}\dfrac{1}{(s-2)^{9/2}}$

3. (a) $\dfrac{1}{\Gamma(5/2)}t^{3/2}=\dfrac{4}{3\sqrt{\pi}}t^{3/2}$

(b) $\dfrac{1}{\Gamma(3/2)}t^{1/2}+\dfrac{1}{\Gamma(5/2)}t^{3/2}=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}t^{1/2}+\dfrac{4}{3\sqrt{\pi}}t^{5/2}$

(c) $\dfrac{1}{\Gamma(5/2)}t^{3/2}+\dfrac{1}{\Gamma(7/2)}t^{5/2}=\dfrac{4}{3\sqrt{\pi}}t^{3/2}+\dfrac{8}{15\sqrt{\pi}}t^{5/2}$

(d) $\dfrac{e^{-t}}{\Gamma(5/2)}t^{3/2}+\dfrac{4e^{-t}}{\Gamma(7/2)}t^{5/2}=\dfrac{4e^{-t}}{3\sqrt{\pi}}t^{3/2}+\dfrac{32e^{-t}}{15\sqrt{\pi}}t^{5/2}$

(e) $\dfrac{e^{-3t}}{\Gamma(9/2)}t^{7/2}=\dfrac{2^4e^{3t}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\sqrt{\pi}}t^{7/2}$

## BÖLÜM 5.4

1. (a) $-\dfrac{27(s^2-3)}{(s^2+9)^2}$ (b) $\dfrac{4s^3(3s^2-4)}{(s^2+4)^3}$ (c) $\dfrac{4!\,s^3}{(s-2)^5}$

(d) $\dfrac{5!\,s^4}{(s-1)^6}$ (e) $\dfrac{4!\,s^6(s^2-1)}{(s^2+1)^4}-24$ (f) $\dfrac{6s^4}{(s-2)^4}-6$

(g) $\dfrac{2s^3}{(s-1)^2+4}-2s-4$ (h) $\dfrac{s^3(s-2)}{(s-2)^2+9}-s^2-2s+5$ (i) $\dfrac{2s^4}{(s^2-1)^2}-2$

(j) $\dfrac{2s^3(s^2-27)}{(s^2+9)^3}$ (k) $\dfrac{8s^2(3s^2-16)}{(s^2+16)^3}$

2. (a) $\dfrac{s-\alpha}{s[(s-\alpha)^2+\beta^2]}$ (b) $\dfrac{s(s-2)}{(s-1)(s^2-2s+2)^2}$

(c) $\dfrac{\beta}{(s-1)[(s-1-\alpha)^2+\beta^2]}$

3. (a) $y(t) \equiv 1$ (b) $y(t) = e^{-t}$

(c) $y(t) = t(2+t)e^t$ (d) $y(t) = 1 - \dfrac{t^2}{2}$

(e) $y(t) = \frac{1}{3}[e^t - e^{t/2}\cos(\sqrt{3}/2)t + (\sqrt{3}/3)e^{t/2}\sin(\sqrt{3}/2)t]$

(f) $y(t) = t + \dfrac{t^3}{6}$ (g) $y(t) = \frac{2}{5}e^{2t} + \frac{3}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t$

(h) $y(t) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cos\sqrt{3}x$ (i) $y(t) = t - \dfrac{t^3}{6}$ (j) $y(t) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\sinh\dfrac{\sqrt{5}}{2}t$

4. (a) $\dfrac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1)$ (b) $\dfrac{1}{a}(1-\cos at)$

(c) $\dfrac{1}{a^2}(at - \sin at)$ (d) $\dfrac{t}{2a}\sin at$

(e) $\dfrac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$ (f) $\dfrac{1}{5}(3\sin 3t - 2\sin 2t)$

## BÖLÜM 5.5

1. (a) $f(t) = 2u(t-3), Lf(t) = \dfrac{2e^{-5s}}{s}$

(b) $f(t) = 2 - 3u(t-1) + u(t-2), Lf(t) = \dfrac{1}{s}(2 - 3e^{-s} + e^{-2s})$

(c) $f(t) = u(t-1) - 4u(t-2) + 7u(t-3), Lf(t) = \dfrac{1}{s}(e^{-s} - 4e^{-2s} + 7e^{-3s})$

(d) $f(t) = t - u(t-1)(t-1) - u(t-3), Lf(t) = \dfrac{1}{s^2}(1 - e^{-s} - se^{-3s})$

(e) $f(t) = 2t - 4u(t-1)(t-1) + 2u(t-2)(t-2), Lf(t) = \dfrac{1}{s^2}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s})$

(f) $f(t) = t^2 - u(t-1)[(t-1)^2 + 2(t-1)] - u(t-2)[(t-2)-1] - u(t-4)(t-4)$

$$Lf(t) = \frac{2}{s^3}(1-e^{-s}) - \frac{1}{s^2}(2e^{-s} + e^{-2s} - e^{-4s}) + \frac{1}{s}e^{-2s}$$

2. (a) $\dfrac{se^{-\beta s}}{s^2+1}$ (b) $\dfrac{e^{-\beta s}}{2}\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{2s}{s^2+4}\right)$ (c) $\dfrac{e^{1-s}}{s-3}$

(d) $\dfrac{e^{7-2s}}{s-2}$ (e) $\dfrac{1}{s}\left(1+\dfrac{1}{s}\right)e^{-s}$ (f) $\dfrac{2}{s}\left(2+\dfrac{2}{s}+\dfrac{1}{s^2}\right)e^{-2s}$

3. (a) $u(t-3)$ (b) $u(t-5)e^{3(t-5)}$ (c) $\dfrac{1}{3}u(t-2)\sin 3(t-2)$

(d) $\dfrac{1}{2}u(t-3)(e^{2(t-3)}-1)$ (e) $2 - 3u(t-1) + u(t-3)$

(f) $\dfrac{1}{6}t^3[1+u(t-2)e^{-3t}]$ (g) $u(t-1)2u(t-2) + 2u(t-3) - u(t-4)$

4. (a) $\dfrac{1}{2s(1-e^{-2s})}(1+e^{-s}-e^{-2s})$ (b) $\dfrac{1}{s(1-e^{-as})}\left[\left(1-\dfrac{1}{s}\right)(1-e^{-as}) + ae^{-as})\right]$

(c) $\dfrac{1-e^{-s}}{s^2(1+e^{-s})}$ (d) $\dfrac{1}{s^2+1}\dfrac{1}{1-e^{-\pi s}}$

6. (a) $\dfrac{1+e^{-\pi s}}{(1+s^2)(1-e^{-Ts})}$ (b) $\dfrac{a}{s}\tanh\dfrac{bs}{2}$ (c) $\dfrac{a}{bs^2}\tanh\dfrac{bs}{2}$

## BÖLÜM 5.6

1. (a) $y(t) = (t+1)e^{-t}$ (b) $y(t) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{5}e^t + \dfrac{1}{10}\cos 2t - \dfrac{1}{5}\sin 2t$

(c) $y(t) = 1 - 2\cos t$ (d) $y(t) = (2+t)e^{-t} + t - 2$

(e) $y(t) = \dfrac{t}{2}\sin t + \sin t$ (f) $y(t)4t + 3 - 2t$

(g) $y(t) = t(\sin t + \cos t)$ (h) $y(t) = (y_0 - y_0'') + (y_0' - y_0'')t + y_0''e^t$

(i) $y(t) = \frac{1}{2}t^2 - 1 + \cos t - \sin t$

(j) $y(t) = \frac{1}{2}(1 - e^t \cos t + e^t \sin t)$

(k) $y(t) = 2t + \frac{1}{2}(e^{-t} - \sin t + \cos t)$

(l) $y(t) = \frac{1}{2}t \sin t - \cos t + \sin t$

(m) $y(t) = \frac{1}{4}t + \cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t$

(n) $y(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t - 1$

(o) $y(t) = (1 - t)\cos t$

(p) $y(t) = \frac{t}{4}\sin 2t + \frac{1}{12}(\cos 2t - \cos 4t)$

(r) $y(t) = (t - 1)e^t + \cos t + 2\sin t - 2t\cos t$

(s) $y(t) = \frac{a}{2n^2}[\sin t \cos\alpha - nt\cos(nt + \alpha)]$

(t) $y(t) = \frac{\gamma}{2}t^2 + (1 - \gamma)t + (\gamma - 1) + \left(\frac{1}{2} - \gamma\right)e^{-t} + \frac{1}{2}(\cos t - \sin t)$

2. (a) $y(t) = e^{-t} + u(t - 3)(1 - e^{-(t-3)})$

(b) $y(t) = 1 + t + 2u(t - 2)(t - 2)$

(c) $y(t) = u(t - \alpha)[1 - \cos(t - \alpha)] - u(t - 2\alpha)[1 - \cos(t - 2\alpha)]$

(d) $y(t) = \cos 2t + \frac{1}{6}u(t - 2\pi)[2\sin(t - 2\pi) - \sin 2(t - 2\pi)]$

(e) $y(t) = 3(1 - e^{-t}) + \frac{1}{2}t^2 - t + 3u(t - 1)(t - 2 + e^{-(t-1)})$

(f) $y(t) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) - u(t - 1)\left[t - 1 - \frac{1}{2}\sin 2(t - 1)\right]$
$+ \frac{1}{2}u(t - 2)\left[t - 2 - \frac{1}{2}\sin 2(t - 2)\right]$

(g) $y(t) = \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{9}u(t - 1)\left[t - 1 - \frac{1}{3}\sin 3(t - 1)\right] - \frac{2}{9}u(t - 2)$
$\left[t - 2 - \frac{1}{3}\sin 3(t - 2)\right] + \frac{1}{9}u(t - 3)\left[t - 3 - \frac{1}{3}\sin 3(t - 3)\right]$

(h) $y(t) = \frac{1}{2}[1 - e^t(\cos t - \sin t)] + \frac{1}{2}u(t - 2)[1 - e^{t-2}(\cos(t - 2) - \sin(t - 2)]$

(i) $y(t) = \frac{2a}{\beta^2}\sin^2\frac{\beta t}{2}[1 - u(t - t_0)]$

3. (a) $y(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} - \frac{t}{2}e^{-t}$ (b) $y(t) = C_1 \cosh t + C_2 \sinh t + \frac{1}{2}t \sinh t$

(c) $y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t(t \sin t + \cos t)$

(d) $y(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t} + te^{-2t}$

(e) $y(t) = (C_1 + C_2t + C_3t^2)e^t + \frac{1}{6}t^3e^t$

(f) $y(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t + \frac{t}{2}(t-3)e^t - \frac{t}{4}\sin t$

(g) $y(t) = C_1 + C_2 - 1 + (C_2 + 1)e^{-t} + t + u(t-1)\left[t - 2 + e^{-(t-1)}\right]$

(h) $y(t) = (2C_1 + C_2)e^{-t} - (C_1 + C_2)e^{-2t} + \frac{3}{2} - 3e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}$

$$- 2u(t-1)\left[\frac{1}{2} - e^{-(t-2)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right] + u(t-2)\left[\frac{1}{2} - e^{-(t-2)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-2)}\right]$$

$$y(t) = C_1 \cosh t + C_2 \sinh t + \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}\sinh t + u(t-3)[-1 + \cos(t-3)]$$

## BÖLÜM 5.7

1. (a) $y(t) = \frac{1}{5}(1 + e^{-t})\sin t - \frac{1}{5}(1 - e^{-t})\cos t$

(b) $y(t) = t \sin t - \frac{4}{\sqrt{3}} \sin t \arctan \frac{\tan(t/2)}{\sqrt{3}} + \cos t \ln(2 + \cos t) - \ln 3 \cos t$

(c) $y(t) = e^t - 1 - (e^t + 1)\left[t - \ln(e^t + 1) + \ln 2\right]$

(d) $y(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^{-t})$ (e) $y(t) = \frac{1}{2}(t \cosh t - \sinh t)$

(f) $y(t) = \ln 2 \cos t - \cos t \ln(2 + \sin t) - t \sin t$

$$+ \frac{2}{\sqrt{3}}(2 \sin t + 1)\left(\arctan \frac{2\tan(t/2) + 1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right)$$

(g) $y(t) = \frac{1}{2}(e^t - \sin t + \cos t - 2)$ (h) $y(t) = \frac{1}{2}(e^t - \sin t + \cos t - 2)$

(i) $y(t) = \frac{1}{2}t^2 - t + 1 - e^{-t}$

## BÖLÜM 5.8

1. (a) $e^{-t_0 s} + 2e^{-2t_0 s} + 3e^{-3t_0 s} + 4e^{-4t_0 s}$ (b) $1 - e^{-as} + 2e^{-2as} - 3e^{-3as} + 4e^{-4as}$

   (c) $1 + e^{-\pi s} + 2e^{-2\pi s} + 3e^{-3\pi s} + 4e^{-4\pi s}$

   (d) $1 + e^{-\pi s} + 2e^{-2\pi s} + 3e^{-3\pi s} + \cdots + ne^{-n\pi s} + \cdots$

   (e) $a_0 + a_1 s e^{-s} + a_2 s^2 e^{-2s} + a_3 s^3 e^{-3s}$

2. (a) $x(t) = A$ (b) $x(t) = \dfrac{A}{\omega}\sin\omega t + \cos\omega t$ (c) $x(t) = A\cos\omega t$

   (d) $x(t) = x_0\cos\omega t + \dfrac{x_0'}{\omega}\sin\omega t + \dfrac{A}{\omega}u(t-t_0)\sin\omega(t-t_0) + B\cos\omega(t-t_1)$

   (e) $x(t) = \dfrac{A}{\omega}[u(t-t_0)\sin\omega(t-t_0) + u(t-2t_0)\sin\omega(t-2t_0)$
   $+\cdots + u(t-nt_0)\sin\omega(t-nt_0)]$

## BÖLÜM 5.9

1. (a) $x(t) = e^t,\ y(t) = -e^t$

   (b) $x(t) = -\dfrac{1}{2}(1-\cosh\sqrt{2}t - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t,\ y(t) = -\dfrac{1}{2}(1-\cosh\sqrt{2}t)$

   (c) $x(t) = e^t(\cos t - 2\sin t),\ y(t) = e^t(\cos t + 3\sin t)$

   (d) $x(t) = e^{2t},\ y(t) = 3e^{2t}$

   (e) $x(t) = 2e^{\alpha t}\sin\beta t,\ y(t) = 2e^{\alpha t}\cos\beta t - e^{\alpha t}$

   (f) $x(t) = -2e^{3t} + 2e^{2t},\ y(t) = e^{3t} - 2e^{2t}$

   (g) $x(t) = -2te^t\sin t,\ y(t) = 2e^t(t\cos t + 3t\sin t + \sin t)$

   (h) $x(t) = -t\sin t - t\cos t - \dfrac{1}{2}\sin^2 t\cos t - 5\sin t\cos t + 5\sin^2 t - \dfrac{1}{2}\sin^3 t$
   $+5(\cos t - \sin t)\ln(\sec t + \tan t),\quad y(t) = 5\cos t\ln(\sec t + \tan t)$

   (i) $x(t) = -\dfrac{1}{3}e^{-2t} + \dfrac{1}{3}e^t + au(t-1)\left[\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}(t-1) - \dfrac{1}{4}e^{-2(t-1)}\right],$

   $y(t) = \dfrac{1}{3}e^{-2t} + \dfrac{2}{3}e^t + au(t-1)\left[-\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}(t-1) + \dfrac{1}{4}e^{-2(t-1)}\right]$

(j) $x(t) = \frac{1}{3\sqrt{2}}\sinh\sqrt{2}t - \frac{2}{3}\cosh\sqrt{2}t - \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}\sin t$

$+\frac{a}{2}u(t-2)\left[-1+\cosh\sqrt{2}(t-2)\right],$

$y(t) = -\frac{5}{3\sqrt{2}}\sinh\sqrt{2}t + \cosh\sqrt{2}t - \frac{1}{3}\sin t$

$+au(t-2)\left[-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cosh\sqrt{2}(t-2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh\sqrt{2}(t-2)\right]$

(k) $x(t) = \frac{1}{4}e^{-t} - e^{t} + \frac{11}{4}e^{3t},\ y(t) = -\frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{t} + \frac{11}{8}e^{3t}$

(l) $x(t) = t - t^2 - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{12}t^5,\ y(t) = -\frac{1}{2}t^2,\ z(t) = t^2 + \frac{1}{6}t^3$

(m) $x(t) = \frac{2}{5}(e^{3t} - e^{-2t}),\ y(t) = \frac{1}{5}(3e^{3t} + 2e^{-2t}),\ z(t) = \frac{1}{5}(3e^{3t} + 2e^{-2t})$

(n) $x(t) = 6e^{t} - e^{2t} - 4e^{3t},\ y(t) = 3e^{t} - 2e^{3t},\ z(t) = -6e^{t} + e^{2t} + 6e^{3t}$

2. (a) $x(t) = -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{4}e^{t} + \frac{1}{4}e^{-t}$

(b) $x(t) = 2(1 - e^{-t} - te^{-t}),\ y(t) = 2 - t - 2e^{-t} - 2te^{-t}$

(c) $x(t) = -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{3}{4}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{23}}{2}t + \frac{11}{4\sqrt{23}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{23}}{2}t$

$y(t) = -\frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{8}e^{2t} + \frac{5}{8}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{23}}{2}t - \frac{73}{8\sqrt{23}}e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{23}}{2}t$

(d) $x(t) = \frac{1}{3}(e^{t} + 2\cos 2t + \sin 2t),\ y(t) = \frac{2}{3}\left(e^{t} - \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)$

(e) $x(t) = \sin t + \sinh t,\ y(t) = \cos t + \cosh t$

(f) $x(t) = \frac{1}{4}(5e^{t} - e^{3t} - 2te^{3t}),\ y(t) = \frac{1}{4}(e^{t} - e^{3t} + 2te^{3t})$

(g) $x(t) = -\sin t,\ y(t) = -\cos t,\ z(t) = \sin t$

3. (a) $x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t, y(t) = C_2\cos t - C_1\sin t$

(b) $x(t) = (C_1 - C_2 - C_1 t)e^{-3t},\ y(t) = (C_1 t + C_2)e^{-3t}$

(c) $x(t) = C_1 + C_2e^{2t} - \frac{1}{4}(t^2 + t)$, $y(t) = C_2e^{2t} - C_1 + \frac{1}{4}(t^2 - t - 1)$

(d) $x(t) = C_1 + C_2t + 2\sin t$, $y(t) = -2C_1 - C_2(2t + 1) - 3\sin t - 2\cos t$

(e) $x(t) = C_1 \cosh t - C_2 \sinh t + t\cosh t$, $y(t) = C_2 \cosh t(1 - C_1)\sinh t - t\sinh t$

(f) $x(t) = C_1e^{t\sqrt{2}} + C_2e^{-t\sqrt{2}} + C_3 \cos t + C_4 \sin t + e^t - 2t$,

$y(t) = -C_1e^{t\sqrt{2}} - C_2e^{-t\sqrt{2}} - \frac{1}{4}(C_3 \cos t + C_4 \sin t) - \frac{1}{2}e^t + t$

(g) $x(t) = C_1 + C_2 \sin t + C_3 \cos t$, $y(t) = C_4 + C_3 \sin t - C_2 \cos t + \frac{1}{2}t^2$

(h) $x(t) = C_1 + C_2 \sinh t + C_3 \cosh t$,

$y(t) = C_4 - C_3 \sinh t - C_2 \cosh t + \cosh t + \cos t$

(i) $x(t) = 1 + t - \sin t - \cos t - 2u(t - \pi/2)[(t - \pi/2) - \sin(t - \pi/2)] +$

$u(t - \pi)[-1 + (t - \pi) + \cos(t - \pi) - \sin(t - \pi)]$

## 5. BÖLÜM İÇİN

1. (a) $\frac{3}{s^2} + \frac{2}{s^2 + 1} - \frac{3}{s}$

(b) $\frac{5s}{s^2 + 4} - \frac{3}{s - 1} - \frac{1}{s^2}$

(c) $\frac{6}{s^2 - 4} - \frac{5s}{s^2 - 9} - \frac{1}{s^2 + 1}$

(d) $\frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)}$

(e) $\frac{2}{s(s^2 + 4)}$

(f) $\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha + \beta}{s^2 + (\alpha + \beta)^2} + \frac{\alpha - \beta}{s^2 + (\alpha - \beta)^2}\right]$

(g) $\frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2 + (\alpha - \beta)^2} - \frac{s}{s^2 + (\alpha + \beta)^2}\right]$

(h) $\frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2 + (\alpha + \beta)^2} + \frac{s}{s^2 + (\alpha - \beta)^2}\right]$

(i) $\frac{6}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}$

(j) $\frac{1}{8}\left(\frac{3}{s} + \frac{s}{s^2 + 16} - \frac{4s}{s^2 + 1}\right)$

(k) $\frac{s(s^2 + 7)}{(s^2 + 9)(s^2 + 1)}$

(l) $\frac{6}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}$

(m) $\frac{1}{8}\left(\frac{3}{s} + \frac{s}{s^2 + 16} - \frac{4s}{s^2 + 1}\right)$

(n) $\frac{s(s^2 + 7)}{(s^2 + 9)(s^2 + 1)}$

(o) $\ln \frac{s}{s-1}$ (p) $\frac{1}{2}\ln \frac{s^2+4}{s^2+1}$

(r) $\ln \frac{\sqrt{s^2+1}}{s}$ (s) $\ln \frac{s}{s-1}+\frac{1}{s}$ (t) $\ln \frac{s+1}{s-1}$

2. (a) hayır (b) hayır

(c) hayır (sınırlı fonksiyonlar olmadıkları için)

3. (a) $e^{-2t}\sin 2t$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-2t}\sin\sqrt{3}t$ (c) $(1-t)e^{-t}$

(d) $\frac{1}{2\beta}t\sin\beta t$ (e) $\sinh t - t$ (f) $\frac{1}{16}(\sinh 2t - \sin 2t)$

(g) $\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{15}e^{-t}-\frac{1}{10}\cos 2t-\frac{1}{5}\sin 2t$ (h) $\frac{\cosh\alpha t-\cos\beta t}{\alpha^2+\beta^2}$

(i) $\frac{e^{-\alpha t}(1-\cos\beta t)}{\alpha^2+\beta^2}$ (j) $\frac{1}{5}(\sin t-2\cos t)+\frac{1}{5}e^{-t}(\sin t+2\cos t)$

4. (a) $\frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$ (b) $\frac{s}{(s-2)(s^2+1)}$

(c) $\frac{2}{s^2(s^2-1)}$ (d) $\frac{2}{s^3(s+2)}$

5. (a) $x(t)=\frac{1}{5}(e^{-2t}-\cos t+2\sin t)$ (b) $x(t)=t$ (c) $x(t)=\frac{1}{4}(1-e^{-2t}+2te^{2t})$

(d) $x(t)=\frac{1}{8}(3e^{t}-e^{-3t}-2e^{-t})$

(e) $x(t)=\frac{1}{25}(2e^{-2t}-2\cos t+14\sin t-5t\sin t-10t\cos t)$

(f) $x(t)=2+\frac{1}{2}(e^{-t}-\cos t+\sin t)$ (g) $x(t)=t^2-4t+6-5e^{-t}-te^{-t}$

(h) $x(t)=-1-\frac{1}{2}(e^{-t}+\cos t+\sin t)$ (i) $x(t)=\frac{1}{2}(e^{t}+\cos t+3\sin t)-1$

(j) $x(t)=-\frac{t}{24}[3\cos t+(t^2-3)\sin t]$ (k) $x(t)=\frac{1}{4}(\cosh t-\sinh t)$

(l) $x(t) = \frac{1}{2}e^{t}(2\cos t + 2\sin t - 1) + \frac{1}{2}e^{-3t}$

6. (a) $x(t) = 1 - e^{-t} - u(t-2)[1 - e^{-(t-2)}]$

(b) $x(t) = \frac{t}{2}\sin t + \frac{1}{2}u(t-\pi)(t-\pi)\sin(t-\pi)$

(c) $x(t) = -\frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{2}\sinh t - \frac{e^{-1}2}{}u(t-1)[(t-1)e^{-(t-1)} - \sinh(t-1)]$

(d) $x(t) = 2\left[\sin^2\frac{t}{2} - 2u(t-1)\sin^2\frac{t-1}{2} + u(t-2)\sin^2\frac{t-2}{2}\right]$

7. (a) $y(t) = \frac{1}{2}\sinh t + \frac{1}{2}\sin t$ (b) $y(t) = t + \frac{1}{6}t^3$

(c) $y(t) = \frac{2}{5}e^{2t} + \frac{3}{5}\cos t + \frac{1}{3}\sin t$ (d) $y(t) = \frac{1}{3}(4 - \cos\sqrt{3}t$

(e) $y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{t} + \frac{1}{3}e^{-t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

(f) $y(t) = \cosh t - te^{-t}$ (g) $y(t) = 1 - t$

(h) $y(t) \equiv 1$ (i) $y(t) = 1 + 2t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3$

(j) $y(t) = e^{-t}$ (k) $y(t) \equiv 1$ (l) $y(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2$

8. (a) $x(t) = -\frac{5}{3}\sin 3t - \cos 3t,\ y(t) = 2\cos 3t - \frac{7}{3}\sin 3t$

(b) $x(t) = \frac{28}{9}e^{3t} - e^{-t} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9},\ y(t) = \frac{28}{9}e^{3t} + e^{-t} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9}$

(c) $x(t) = \frac{3e^{-2t}}{4(2+\alpha)} + \frac{(11-4\alpha)e^{2t}}{4(2-\alpha)} + \frac{3e^{\alpha t}}{\alpha^2 - 4}$

$y(t) = -\frac{e^{-2t}}{4(2+\alpha)} + \frac{(11-4\alpha)e^{2t}}{4(2-\alpha)} + \frac{(\alpha+1)e^{\alpha t}}{\alpha^2 - 4}$

(d) $x(t) = 2 - e^{-t},\ y(t) = 2 - e^{-t},\ z(t) = -2 + 2e^{-t}$

(e) $x(t) = \sin t - \cos t,\ y(t) = \sin t + \cos t$

**(f)** $x(t) = \sin t + \sinh t, y(t) = \cos t + \cosh t$

**(g)** $x(t) = t\cos t, y(t) = -t\sin t$

**(h)** $x(t) = -\dfrac{1}{15t^2} + \dfrac{13}{12t} - 2 + \dfrac{1}{6}t + \dfrac{2}{3}t^2 + \dfrac{3}{20}t^3,$

$$y(t) = \frac{1}{15t^2} + \frac{13}{12t} - 2 - \frac{1}{6}t + \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{20}t^3,$$

$$z(t) = -\frac{13}{12t} - \frac{1}{2}t + \frac{4}{3}t^2 + \frac{1}{4}t^3$$

**9*.** **(a)** $\dfrac{\pi}{2a}e^{-at}$

**(b)** $\dfrac{\pi}{2}e^{-t}$

**Yönerge:** Her iki tarafın Laplace dönüşümünü alıp $\int e^{-st}\sin st dt$ ve $\int e^{-st}\cos st dt$ integrallerinin hesaplanma formülünü kullanın (bkz. 1, Bölüm 5.4).

**10.** **(a)** **1.** $x(t) = 3(1-\cos t) - 3u(t-2)[1-\cos(t-2)]$

**2.** $x(t) = \dfrac{t}{2}\sin t + \dfrac{1}{2}u(t-\pi)(t-\pi)\sin(t-\pi)$

**3.** $x(t) = 2\left[\sin^2\dfrac{t}{2} - 2u(t-1)\sin^2\dfrac{t-1}{2} + u(t-2)\sin^2\dfrac{t-2}{2}\right]$

**(b)** **1.** $x(t) = a(\cosh t - 1) - au(t-b)[\cosh(t-b) - 1]$

**2.** $x(t) = \sinh t - t - u(t-1)[t - \cosh(t-1) - \sinh(t-1)]$

**3.** $x(t) = \cosh t - 1 - 2u(t-1)[\cosh(t-1) - 1] + u(t-2)[\cosh(t-2) - 1]$

**(c)** $x(t) = 3(1-\cos t) - u(t-1)[1-\cos(t-1)] - 2u(t-2)[1-\cos(t-2)]$

$$y(t) = 3\sin t - 2t - u(t-1)\sin(t-1) + 2u(t-2)[t-2-\sin(t-2)]$$

**(d)** $x(t) = \dfrac{1}{2}(\cosh t + \cos t - 2) - u(t-\pi)[\cosh(t-\pi) - \cos(t-\pi) - 2]$

$$+\frac{1}{2}u(t-2\pi)[\cosh(t-2\pi) + \cos(t-2\pi) - 2]$$

$$y(t) = \frac{1}{2}(\cosh t - \cos t) - u(t-\pi)[\cosh(t-\pi) - \cos(t-\pi)]$$

$$+\frac{1}{2}u(t-2\pi)[\cosh(t-2\pi) - \cos(t-2\pi)]$$

# DİZİN


Açık çözüm, 47, 109, 231
Airy, 285
  denklemi, 285
  fonksiyonları, 286
Analitik fonksiyon, 282
Analitik yöntem, 267
Araba farının biçimi, 71
Ardarda diferansiyelleme yöntemi, 282
  yok etme yöntemi, 44
Asma köprü halatı, 83

Bağımsız bilinmeyenler, 39
  terim, 32
Başlangıç değer problemi, 62
  fonksiyonu, 310
  faz, 202
Başlangıç fonksiyonun
diferansiyellenmesi, 333
  integrallenmesi, 334
Basit basamak fonksiyonu, 341
  nokta, 131, 294
Belirleyici denklem, 297
Belirsiz katsayılar yöntemi, 288
Benzerlik özelliği, 311
Bernoulli denklemi, 108
  yöntemi, 98
Bessel, 300
  denklemi, 300
  fonksiyonları, 302, 304
Birim basamak fonksiyonu, 340
Bürüm formülü (görüntülerin çarpımı), 335

Capelli, 35
Cauchy formülü, 103, 355
  problemi, 62
Clairaut denklemi, 140
Cramer, 35
  kuralı, 36
  formülü, 36
  teoremi, 36

Çokgen çizgisi, 269
Çözüm, 60, 252
  asimptotik kararlı, 255
  kararlı, 254
  kararsız, 255
Çözümün diferansiyellenebilirliği, 77
  giriş verilerine bağımlılığı, 77

Darboux, 115
  denklemi, 115
Denklemler sisteminin matris şekli, 33, 231
  vektör şekli, 223
Determinant, 9
  iki basamaklı, 9
  $n$ basamaklı, 16
  üç basamaklı, 14
Determinantın esas köşegeni, 16
  açılım formülü, 10, 15
  satırları, 10
  sütunları, 10
  yan köşegeni, 16
Devirim (transpozisyon) matrisi, 6
Devirli fonksiyonun görüntüsü, 347
Diferansiyel denklem, 59
  adi, 59

İçindekiler:

1. Cilt


▷ Genel Bakış
▷ Fonksiyon, Limit ve Süreklilik
▷ Türev ve Uygulamaları
▷ Belirli İntegral
▷ Diferansiyel Calculus'ta Konular
▷ Ters Türevlerin Hesaplanması
▷ Belirli İntegralin Uygulamaları


2. Cilt

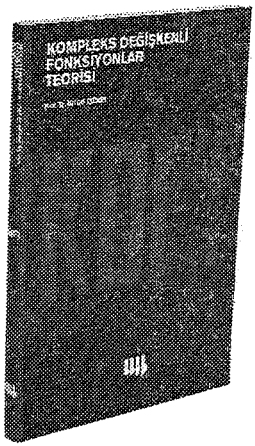

▷ Düzlemsel Eğriler ve Polar Koordinatlar
▷ Seriler
▷ Kuvvet Serileri ve Karmaşık Sayılar
▷ Vektörlerde Cebirsel İşlemler
▷ Bir Vektör Fonksiyonun Türevi
▷ Kısmi Türevler
▷ Düzlemsel ve Cisimsel Bölgeler Üzerinden Belirli İntegraller
▷ Green Teoremi
▷ Diverjans Teoremi ve Stokes Teoremi



türeve göre çözülmemiş, 78, 133
Diferansiyel denklemler sistemi, 220
genel çözümü, 223
normal sistem, 222
özel çözümü, 223
sabit katsayılı, 230
türdeş, 230
Diferansiyel ifade, 157
Dirac, 376
fonksiyonları, 376, 377
Direnç kuvveti, 201
Doğrultular alanı, 64
Doğrusal bağımlı fonksiyonlar, 159
bağımlı satır (sütun) matrisler, 28
bağımsız fonksiyonlar, 159
bağımsız satır (sütun) matrisler, 28
bağıntı, 28, 159
yaklaşık yöntemi, 267
yöntemi, 103, 267, 278

Fonksiyon, 157
Fonksiyonel, 157
Fonksiyon matrisleri, 2
FORTRAN, 278
Frobenius, 293, 296
kuralı, 299
yöntemi, 296

Gamma fonksiyonu, 303, 328
Gauss eleme yöntemi, 43
Gecikmiş fonksiyon, 344
Genelleştirilmiş kuvvet serisi, 296
Giriş verileri, 77
Görüntü (operatör) denklemi, 354



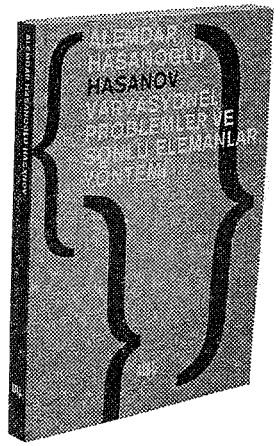

## Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi

**Mithat İdemen**
Işık Üniversitesi
Mühendislik Fak.

**BASIM: 1999, 208 SAYFA,**
**EBAT: 19.5 x 27.5**
**ISBN: 975-7860-91-3**

İçindekiler:

- ▷ Kompleks Düzlem
- ▷ Kompleks Düzlemde Fonksiyonlar
- ▷ Kompleks Düzlemde Türev
- ▷ Kompleks Düzlemde İntegral
- ▷ Cauchy Formülü ve Bazı Sonuçları
- ▷ Tam Fonksiyonlar
- ▷ Analitik Devam
- ▷ Cauchy Çekirdeği İle İfade Edilen Fonksiyonlar. Hilbert ve Wiener-Hopf Problemleri




## Varyasyonel Problemler ve Sonlu Elemanlar Yöntemi

**Alemdar Hasanoğlu [Hasanov]**
Kocaeli Üniversitesi

**BASIM: 2001, XIV + 288 SAYFA,**
**EBAT: 16.8 x 23.5**
**ISBN: 975-8431-33-1**

Esnek levhanın eğilmesi probleminin sonlu elemanlar yönetemiyle çözümünü dünyada ilk kez gerçekleştiren ünlü matematikçi Alemdar Hasanoğlu (Hasanov) özgün çalışması.

İçindekiler:

- ▷ Matematiksel Fiziğin Sınır Değer Problemleri Zayıf Çözüm ve Varyasyonel Yöntem
- ▷ Bir Boyutlu Problemler İçin SEY
- ▷ İki Boyutlu Problemler İçin SEY
- ▷ İzoparametrik Elemanlar
- ▷ Uyumsuz (veya Konform Olmayan) Sonlu Elemanlar
- ▷ SEY'in İki Boyutlu Lineer Elastisite Problemine Uygulanması

# Sayısal Çözümleme

**Recep Tapramaz**
Samsun On Dokuz Mayıs
Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü

**BASIM: 2002, XIV + 410 SAYFA,**
**EBAT: 16.8 x 23.5**
**ISBN: 975-8431-82-X**

Bilim, problemleri ortaya koyar ve onlara çözümler üretir. Matematik, bilimin ortak dilidir. Hem problemleri ifade ederken, hem de onlara çözümler yapmaya çalışırken bu dili kullanırız. Ayrıca, matematik bilimsel düşünmeyi, yani doğru ve net düşünmeyi öğretir. Düşünmeyi ve düşünebilmeyi öğretir, kişiyi doğru sonuca yönlendirir. Bu haliyle matematik bir eğitim aracı olarak da kabul edilir. Bilim adamlarının karşılaştığı en önemli sorunlardan biri, problemleri matematiğin diliyle ifade ettikten sonra çözümünü yapmaktır. İşte bu noktada Sayısal Çözümleme, diğer adıyla Nümerik Analiz devreye girer. Çünkü çözüm başlı başına bir problemdir. Zaten, matematik yıllar içinde geliştikçe, çözüm yapabilmek için Sayısal Çözümleme yöntemleri de matematiğin bir kolu olarak ortaya çıkmış, gelişmiş ve gelişmektedir. Özet olarak, Sayısal Çözümleme olmazsa olmazlardan birisidir. Özellikle biilgisayarların ortaya çıkması ve yaygın kullanılması bu tekniklerin önemini daha da artırmıştır.

İçindekiler:

▷ Denklem Çözümleri
▷ Polinomlar ve Kökleri
▷ Doğrusal Denklemler
▷ Matris İşlemleri
▷ Özdeğer ve Özvektör
▷ Doğrusal Eğri Uydurma
▷ Doğrusal Olmayan Eğri Uydurma
▷ Fourier Serisi ve Dönüşümü
▷ İnterpolasyon
▷ Türev ve İntegral
▷ Veri İşleme